矩陣的行列式（Determinant）

-線性規劃（Linear Programming）的補充教材-3

3.1 矩陣的行列式
3.2 使用基本運算求行列式
3.3 行列式的性質
3.4 行列式的應用

方陣矩陣的行列式

- 2×2 矩陣的行列式 (determinant)

A [A]

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- 注意：

$$\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2 x 2 矩陣的行列式

- 範例 1：二階矩陣的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-3) \quad = 4 + 3 \quad = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(1) \quad = 4 - 4 \quad = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0(4) - 2(3) \quad = 0 - 6 \quad = -6$$

- 注意： 矩陣的行列式可以為正、零或負值。

高階(維度) 矩陣的行列式-子行列式

j 行 — column

row

i 列

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & & \cdots & a_{i(j-1)} & a_{ij} & \cdots & a_{i} \\ & & \cdots & & & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- a_{ij}的子行列式 (minor of a_{ij}) $\boldsymbol{M_{ij}}$ -$\boldsymbol{A_{nn}}$的第ij個子行列式$\boldsymbol{M_{ij}}$是刪除第i列與第j行之$(n\text{-}1)$ x $(n\text{-}1)$矩陣的行列式。

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{(i-1)1} & & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

高階(維度) 矩陣的行列式-餘因子

- a_{ij} 餘因子 (cofactor of a_{ij})

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

高階(維度) 矩陣的行列式-範例

- 範例 2：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{21}

$$\Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$$

a_{22}

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$$

$(-1)^{i+j}$

- 注意：餘因子的符號型式

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

餘因子展開

- 餘因子展開 (expansion by cofactors)

令A是n階方陣，則A的行列式為

$$(a)\quad \det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$$

（第 i 列展開與其對應的餘因子$\mathbf{C_{ij}}$）　$i=1, 2,\ldots, n$

或

$$(b)\quad \det(A)=|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$$

（第 j 行展開）　$j=1, 2,\ldots, n$

餘因子展開-範例-1

- 範例：

3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

C_{13}　C_{11}

$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$　2×2

C_{12}

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det(A) &= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}\\ &= a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}\\ &= a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33}\\ &= a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}+a_{31}C_{31}\\ &= a_{12}C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32}\\ &= a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}\end{aligned}$$

$\rightarrow$ 2×2

餘因子展開-範例-1

- 範例：

3×3

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

C_{13}　C_{11}

$(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ 2×2

C_{12}

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det(A) &= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13} \\ &= a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23} \\ &= a_{31}C_{31}+a_{32}C_{32}+a_{33}C_{33} \\ &= a_{11}C_{11}+a_{21}C_{21}+a_{31}C_{31} \\ &= a_{12}C_{12}+a_{22}C_{22}+a_{32}C_{32} \\ &= a_{13}C_{13}+a_{23}C_{23}+a_{33}C_{33}\end{aligned}$$

→ 2×2

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

餘因子展開-範例-2

- 範例：三階矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \det(A)=?$$

解：

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=7 \qquad C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=(-1)(-5)=5$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-8$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det(A) &= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13} \\ &= (0)(7)+(2)(5)+(1)(-8) \\ &= 2\end{aligned}$$

餘因子展開-範例-3

- 範例： 4階矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=?$$

$$(+)3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}+0(\;)+0(\;)$$

矩陣的行列式　使用基本運算求行列式　行列式的性質　行列式的應用

餘因子展開-範例-4

- 解：

$$\det(A)=(3)(C_{13})+(0)(C_{23})+(0)(C_{33})+(0)(C_{43})$$

$$=3C_{13}$$

$$=3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

$$=3\left[(0)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}+(2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}+(3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right]$$

$$=3[0+(2)(1)(-4)+(3)(-1)(-7)]$$

$$=(3)(13)$$

$$=39$$

3x3矩陣的行列式-1

- 3x3矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

減這三個乘積

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

加這三個乘積

$$\Rightarrow \det(A)=|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}$$
$$-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

矩陣的行列式　使用基本運算求行列式　行列式的性質　行列式的應用

3x3矩陣的行列式-範例

- 範例 ：

$$\begin{array}{cccccc} & & & -4 & 0 & 6 \\ & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ A= & 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ & 4 & -4 & 1 & 4 & -4 \\ & & & 0 & 16 & -12 \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(A)=|A|=0+16-12-(-4)-0-6=2$$

三角矩陣與對角矩陣

- 上三角矩陣 (upper triangular matrix)

  矩陣之主對角線下方的元素都為零

- 下三角矩陣 (lower triangular matrix)

  矩陣之主對角線上方的元素都為零

- 對角矩陣 (diagonal matrix)

  矩陣之主對角線上方和下方的元素皆為零

三角矩陣與對角矩陣-範例

- 範例：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

上三角矩陣　　下三角矩陣　　對角矩陣

三角矩陣的行列式

- 定理： 三角矩陣的行列式

若 A 是 n 階三角矩陣，則它的行列式為主對角線上元素的乘積。即

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

三角矩陣的行列式-範例

- 範例 6： 求下列矩陣的行列式

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

解：

(a) $|A| = (2)(-2)(1)(3) = -12$

(b) $|B| = (-1)(3)(2)(4)(-2) = 48$

矩陣的主子行列式(Principal Minor)

- 定理：一個 m x m 矩陣A的第k***主子行列式***，是其對角線在A之對角線上的任何 k x k矩陣的行列式

$$A=\begin{bmatrix} -12 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩陣A的第1主子行列式為

$|-12| = -12$　　$|-2| = -2$　　$|0| = 0$

矩陣A的第2主子行列式為

$$\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 8 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

矩陣A的第3主子行列式為 $\begin{vmatrix} -12 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

摘要與複習

- determinant : 行列式
- minor : 子行列式
- cofactor : 餘因子
- expansion by cofactors : 餘因子展開
- upper triangular matrix: 上三角矩陣
- lower triangular matrix: 下三角矩陣
- diagonal matrix: 對角矩陣

使用基本運算求行列式

- 定理：基本列運算和行列式

令 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是方形矩陣

$$(a)\quad B = r_{ij}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = -\det(A)$$

$$(b)\quad B = r_i^{(k)}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = k\det(A)$$

$$(c)\quad B = r_{ij}^{(k)}(A) \quad \Rightarrow \quad \det(B) = \det(A)$$

- 範例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \because \det(A) = -2$$

$$\therefore A_1 = r_1^{(4)}(A) \quad \Rightarrow \det(A_1) = 4\det(A) = (4)(-2) = -8$$

$$A_2 = r_{12}(A) \quad \Rightarrow \det(A_2) = -\det(A) = -(-2) = 2$$

$$A_3 = r_{12}^{(-2)}(A) \quad \Rightarrow \det(A_3) = \det(A) = -2$$

- 使用基本列運算求行列式

  注意：方陣的列梯形形式為上三角矩陣

- 範例 2：使用基本列運算求行列式值

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 10\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \det(A)=?$$

解:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}2 & -3 & 10\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix} \overset{r_{12}}{=} -\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -3 & 10\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_{12}^{(-2)}}{=} -\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -7 & 14\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix} \overset{r_{2}^{(-\frac{1}{7})}}{=} (-1)\left(\frac{1}{\frac{-1}{7}}\right)\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_{23}^{(-1)}}{=} 7\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} = (7)(1)(1)(-1)=7$$

- 注意：

$$\det(A) = -\det(r_{ij}(A))$$

$$\det(A) = \frac{1}{k}\det(r_i^{(k)}(A))$$

$$\det(A) = \det(r_{ij}^{(k)}(A))$$

- 注意：

$$|EA| = |E||A|$$

(1) $E = R_{ij} \quad \Rightarrow |E| = |R_{ij}| = -1$

$$\Rightarrow |EA| = |r_{ij}(A)| = -|A| = |R_{ij}||A| = |E||A|$$

(2) $E = R_i^{(k)} \quad \Rightarrow |E| = |R_i^k| = k$

$$\Rightarrow |EA| = |r_i^k(A)| = k|A| = |R_i^{(k)}||A| = |E||A|$$

(3) $E = R_{ij}^{(k)} \quad \Rightarrow |E| = |R_{ij}^k| = 1$

$$\Rightarrow |EA| = |r_{ij}^{(k)}(A)| = 1|A| = |R_{ij}^{(k)}||A| = |E||A|$$

- 定理 3.4： 產生零行列式的條件

若A是方陣並且下列任何的條件是成立的，則det $(A) = 0$

(a) 一整列(或一整行)全為零

(b) 兩列(或行)是相等的

(c) 某一列(或行)是另一列(或行)的倍數

- 範例：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

- 下列表格針對3、5和10階矩陣列出這兩個方法所需加法(包含減法)和乘法(包含除法)的數目

	餘因子展開		列簡化	
n階	加法	乘法	加法	乘法
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3628799	6235300	285	339

- 範例 5：求行列式

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

解：

$$\det(A)=\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_{13}^{(2)}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-3)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(-1) = 3$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_{12}^{(\frac{4}{5})}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (5)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = (-5)(-\frac{3}{5}) = 3$$

- 範例 6：求行列式

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_{24}^{(1)} \\ r_{25}^{(-1)}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_{41}^{(-3)}}{=}\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & -2 \\ -8 & -1 & 2 & 3 \\ 13 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{r_{21}^{(11)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(-27)$$

$$= -135$$

行列式的性質

行列式的性質-1

1. 單位矩陣$\boldsymbol{I}$的行列式是1。
2. 若$\boldsymbol{A}$的一行或一列之所有元素均為0，則$|\boldsymbol{A}| = 0$。
3. 若$\boldsymbol{A}$的兩行(或兩列)相同，則$|\boldsymbol{A}| = 0$ 。
4. 若$\boldsymbol{A}$的兩行(或兩列)互換，則行列式的絕對值不變，但正負符號改變。
5. 若$\boldsymbol{A}$的其中一行(或一列)之所有元素均乘以純量α，則行列式為 $\alpha|\boldsymbol{A}|$。
6. 若純量α乘以$\boldsymbol{A}$的其中一行(或一列)後加到另一行(或一列)，則行列式不變。
7. 對於兩個 $n \times n$ 的矩陣$\boldsymbol{A}$與$\boldsymbol{B}$ ，$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$。
8. 若$\boldsymbol{A}$的轉置矩陣$\boldsymbol{A}^T$ 與$\boldsymbol{A}$有相同的行列式，即$|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$。

行列式的性質-2-矩陣相乘的行列式

- 定理：矩陣相乘的行列式

$$\mathbf{det}\,(\boldsymbol{AB}) = \mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})\ \det\,(\boldsymbol{B})$$

- 注意:

(1)　$\det(EA) = \det(E)\det(A)$

(2)　$\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

矩陣相乘的行列式-範例-1

- 範例 1: 矩陣相乘的行列式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

求 |A|、|B| 與 |AB|

解：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 11$$

矩陣相乘的行列式-範例-2

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 3 & 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4 & 1\\ 6 & -1 & -10\\ 5 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB|=\begin{vmatrix}8 & 4 & 1\\ 6 & -1 & -10\\ 5 & 1 & -1\end{vmatrix}=-77$$

- 檢查： $|AB| = |A|\,|B|$

若$\boldsymbol{A}$的其中一行(或一列)之所有元素均乘以純量α，則行列式為 $\alpha|\boldsymbol{A}|$。

- 定理 ：矩陣純量積的行列式

若$\boldsymbol{A}$是一個n×n 矩陣並且c是一個純量，則

det (cA) = c^n det (A)

- 範例： 矩陣純量積的行列式

$$A=\begin{bmatrix}10 & -20 & 40\\ 30 & 0 & 50\\ -20 & -30 & 10\end{bmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 5\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=5$$

求 |A|

解：

$$A=10\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 5\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=10^3\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 5\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=(1000)(5)=5000$$

可逆矩陣的行列式

- 定理 3.7：可逆矩陣的行列式

方陣A是可逆(非奇異)若且唯若 $\det(A) \neq 0$

- 範例 3：下列兩個矩陣那一個是可逆?

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

解：

$|A|=0 \quad \Rightarrow \quad A$是不可逆(奇異)

$|B|=-12\neq 0 \quad \Rightarrow \quad B$是可逆(非奇異)

反矩陣與轉置矩陣的行列式

- 定理 3.8：反矩陣的行列式

若A是可逆，則 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

- 定理 3.9：轉置的行列式

若A是一方陣，則 $\det(A^{\mathrm{T}})=\det(A)$

- 範例 4：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{(a)}\ \left|A^{-1}\right|=? \qquad \text{(b)}\ \left|A^{T}\right|=?$$

解：

$$\because\ |A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=4 \qquad \therefore\ \left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}$$

$$\left|A^{T}\right|=|A|=4$$

非奇異矩陣的等價條件

- 非奇異矩陣的等價條件

若A是一個$n \times n$矩陣，下列敘述是等價的

(1) A是可逆

(2) 對每一個$n \times 1$矩陣$\mathbf{b}$，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 具有唯一解

(3) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有顯然解

(4) A列等價於I_n

(5) A可以寫為一些基本矩陣的相乘

(6) $\det(A) \neq 0$

非奇異矩陣的範例-1

- 範例 5：下列系統何者有唯一解?

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \end{array}$$

非奇異矩陣的範例-2

解：

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\because \quad |A| = 0$

$\therefore$ 這個系統沒有唯一解

(b) $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$\because \quad |B| = -12 \neq 0$

$\therefore$ 這個系統有唯一解

3.4 行列式的應用

- A的餘因子矩陣 (matrix of cofactors of A)

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \qquad C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- A的伴隨矩陣 (adjoint matrix of A)

$$adj(A) = [C_{ij}]^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

伴隨矩陣所表示的反矩陣

- 定理 3.10：矩陣之伴隨矩陣所表示的反矩陣

若A是一個 $n \times n$ 可逆矩陣，則

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

- 範例：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = ad - bc \qquad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

矩陣之伴隨矩陣所表示的反矩陣-範例

- 範例 3：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(a)求A的伴隨矩陣

(b)使用A的伴隨矩陣來求 A^{-1}

解： $\because \; C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$\Rightarrow C_{11} = +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4,\; C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,\; C_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,\quad C_{22} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,\; C_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7,\quad C_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\; C_{33} = +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

餘因子矩陣-伴隨矩陣

$\Rightarrow$ A的餘因子矩陣

$$[C_{ij}]=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&0&3\\7&1&2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ A的伴隨矩陣

$$adj(A)=[C_{ij}]^T=\begin{bmatrix}4&6&7\\1&0&1\\2&3&2\end{bmatrix}$$

反矩陣

$\Rightarrow$ A的反矩陣

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A) \qquad \because \ \det(A)=3$$

$$=\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}4&6&7\\1&0&1\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&2&\frac{7}{3}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&1&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

- 檢查： $AA^{-1}=I$

Cramer 法則-1

- 定理 3.11： Cramer 法則 (Cramer's Rule)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}
$$

$$
A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \left[A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}\right] \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

$$
\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{（系統有唯一解）}
$$

Cramer 法則-2

$$
A_j = \left[A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(j-1)}, b, A^{(j+1)}, \cdots, A^{(n)}\right]
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
(\text{即 } \det(A_j) = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj} \ )
$$

$$
\Rightarrow x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n
$$

Cramer 法則-3

- 證明：

$$A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \det(A) \neq 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}b$$

$$= \frac{1}{\det(A)} adj(A)\mathbf{b}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Cramer 法則-4

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} & + & b_2C_{21} & + & \cdots & + & b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} & + & b_2C_{22} & + & \cdots & + & b_nC_{n2} \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ b_1C_{1n} & + & b_2C_{2n} & + & \cdots & + & b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{1}{\det(A)}(b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj})$$

$$= \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

Cramer 法則-範例-1

- 範例 6：使用 Cramer 法則求下列線性方程式系統

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\
2x & & & + & z & = & 0 \\
3x & - & 4y & + & 4z & = & 2
\end{array}
$$

解：

$$
\det(A)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}=10 \qquad \det(A_1)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}=8
$$

Cramer 法則-範例-2

$$
\det(A_2)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-15, \quad \det(A_3)=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-16
$$

$$
\therefore \quad x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{4}{5}
$$

$$
y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{-3}{2}
$$

$$
z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{-8}{5}
$$

摘要與複習

- matrix of cofactors : 餘因子矩陣
- adjoint matrix : 伴隨矩陣
- Cramer’s rule : Cramer 法則