矩陣（Matrix）的運算

-線性規劃（Linear Programming）
的補充教材-2

黃仲正
行銷與流通管理系
南台科技大學

矩陣的乘法運算特性

矩陣乘法具有下列諸性質，設 A, B, C 為三同階矩陣，則：

1. 一般而言，交換律不成立，即 $AB \neq BA$。
2. 分配律成立

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(A+B)C=AC+BC$$

3. 結合律成立

$$A(BC)=(AB)C$$

4. 一般而言，消去律不成立，即

$$AB=0，並不表示\ A=0\ 或\ B=0$$
$$AB=AC，並不表示\ B=C$$

矩陣的乘冪-1

- 設A為一個方陣，k為一正整數，則
  - $A^0 = I$
  - $A^1 = A$
  - $A^{k+1} = A^k A$
- 設A為一個k階方陣，n及m為非負整數，則
  - $A^n A^m = A^{n+m}$
  - $(A^n)^m = A^{nm}$

矩陣的乘冪-2

- 在運算矩陣乘法時，只要不變動其順序，有些相同的矩陣可以合併之，例
  $(ABA^2)A(AB^3) = ABA^4B^3$
- 但不可寫成
  $(ABA^2)A(AB^3) \neq A^5B^4$

轉置矩陣的性質

若 $A=[a_{ji}]_{m\times n}$ 為一 $m\times n$ 矩陣，則 A 的**轉置矩陣** (transpose matrix) 為 $[b_{ij}]_{n\times m}$，其中 $b_{ij}=a_{ji}, 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m$，以 A^T 表之。

- 若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$為m x n矩陣，k為一正整數，則
  - $(\boldsymbol{A}^T)^T= \boldsymbol{A}$
  - $(k\boldsymbol{A})^T= k\boldsymbol{A}^T$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T= \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$
  - $(\boldsymbol{AB})^T= \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$，其中$\boldsymbol{AB}$為有意義。

矩陣的分割(Partitioned Matrix)

- 一個矩陣可將相鄰的行與列分組為*子矩陣*的方式加以分割。
- 子矩陣以$\boldsymbol{A}_{ij}$表示，其中i與j表示子矩陣在原矩陣中的位置。
- 當若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$同為m x n矩陣，且有相同分割方式，則分割後的子矩陣可相加，可相乘。

矩陣的分割-相加

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&4&5\\3&2&1&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&4&5\\\hline 3&2&1&0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11}&\mathbf{A}_{12}+\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{A}_{21}+\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{22}+\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&5\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}3&3&7&9\\\hline 8&8&8&8\end{array}\right]$$

矩陣的分割-相乘-1

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&3\\4&0&1&2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&3\\\hline 4&0&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&2&3\\1&2&2\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}3&2&3\\1&2&2\\\hline 2&1&0\\1&1&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\\\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}&\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

矩陣的分割-相乘-2

$$\mathbf{A}=\overset{2\times 4}{\begin{bmatrix}1&2&1&3\\4&0&1&2\end{bmatrix}}=\left[\begin{array}{cc|cc}\multicolumn{2}{c}{1\times 2}&\multicolumn{2}{c}{1\times 2}\\1&2&1&3\\\hline 4&0&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}&\mathbf{A}_{12}\\\mathbf{A}_{21}&\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\underset{4\times 3}{\begin{bmatrix}3&2&3\\1&2&2\\2&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}}=\left[\begin{array}{cc|c}\multicolumn{2}{c}{2\times 2}&2\times 1\\3&2&3\\1&2&2\\\hline 2&1&0\\1&1&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}&\mathbf{B}_{12}\\\mathbf{B}_{21}&\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}[5\ \ 6]+[5\ \ 4]&[7]+[3]\\ [12\ \ 8]+[4\ \ 3]&[12]+[2]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{1\times 2}{[10\ \ 10]}&\overset{1\times 1}{[10]}\\ [16\ \ 11]&[14]\end{bmatrix}=\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix}\underline{10}&\underline{10}&\underline{10}\\16&11&14\end{bmatrix}}$$

矩陣的基本列運算

- 矩陣的基本列運算(Elementary Row Operation)
  1. 互調兩列
     （以$R_i \leftrightarrow R_j$表示第i列與第j列互換）
  2. 以非零的數乘以某一列的元素
     （以αR_i 表示α乘以第i列）
  3. 以非零的數乘以某一列的元素後，加到另一列的對應位置的元素
     （以$\alpha R_i + R_j$表示α乘以第i列後加到第j列）

矩陣的基本列運算-2

- 若矩陣$\boldsymbol{A}$經過一次或數次的基本列運算後變成矩陣$\boldsymbol{B}$，則稱$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$為列同義（Row Equivalent），並以$\boldsymbol{A}\,^{R}\,\boldsymbol{B}$表之。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$