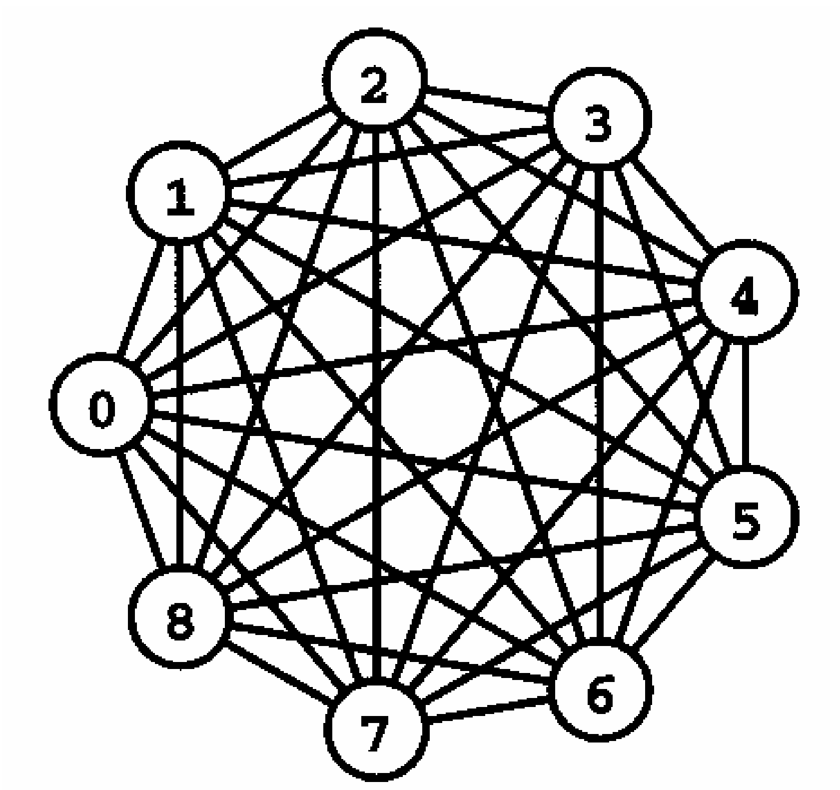
數值函數與生成函數



黎 靖 編著

南台科大電子系

1. 數值函數：

定義域為自然數，值域為實數的函數稱為(離散) 數值函數，表示為a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)，或f(n)。數值函數有下列的運算:

(1) 數值函數的和	Ex: $a_r=\begin{cases}0 & 0\le r\le 2\\ 2^{-r}+5 & r\ge 3\end{cases}$ and $b_r=\begin{cases}3-2^r & 0\le r\le 1\\ r+2 & r\ge 2\end{cases}$ $\Rightarrow c_r=a_r+b_r=\begin{cases}3-2^r & 0\le r\le 1\\ r+2 & r=2\\ 2^{-r}+r+7 & r\ge 3\end{cases}$
(2) 數值函數的積	$d_r=a_rb_r=\begin{cases}0 & 0\le r\le 2\\ r\cdot 2^{-r}+2^{-r+1}+5r+10 & r\ge 3\end{cases}$
(3) 前移: $S^i a$	若a = (a_0, a_1, a_2, ...)，則 S^ia= (0, 0, …, 0, a_0, a_1, a_2, ...)　/*有i個0
(4) 後移: $S^{-i}a$	S^{-i}a= (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ...)
(5) 部分和	數值函數a的部分和=$\sum_{i=0}^{r} a_i$
(6) 向前差分	$\Delta a_r=a_{r+1}-a_r$
(7) 向後差分	$\nabla a_r=a_r-a_{r-1}$
(8) Convolution	a = (a_0, a_1, a_2, ...)且b = (b_0, b_1, b_2, ...)，　若c = a*b $\Rightarrow c_r=\sum_{i=0}^{r}a_ib_{r-i}=a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+...+a_rb_0$ Ex:　$a_r=3^r, r\ge 0$，$b_r=2^r, r\ge 0$ 若c = a*b 則 $c_r=\sum_{i=0}^{r}3^i2^{r-i}$

2. 一般生成函數：

對應於一數值函數(a_0, a_1, a_2..., a_n, ...)，定義無窮級數 $a_0 + a_1z + a_2z^2 + ...$　為a之一般生成函數。相當於給 a_i 加上 z^i 的標記。生成函數存在冪級數型式(formal power series)及收斂型式。

Ex: 數值函數a = (3^0, 3^1, 3^2,…) 的生成函數是

A(z)= $3^0 + 3^1z + 3^2z^2 +\ldots$　或表為 $\sum_{i=0}^{\infty}(3z)^i$ ，稱為冪級數型式，

可進一步表為 $\frac{1}{1-3z}$ ，稱為封閉型式或收斂型式。

生成函數的重要性在於可以使用收斂型式表示數值函數，且數值函數的運算可透過生成函數完成。

2.1 重要的生成函數

$(1+z)^n = C_0^n + C_1^n z + \ldots + C_n^n z^n$	1. $(1+z)^n$ 是數列 $C_0^n, C_1^n, C_2^n, \ldots C_n^n$, 0, 0, …之生成函數。 2. n物在籃中，z表選取1個物件，z^2表選取2個物件，…
$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} z^i$	$\frac{1}{1-z}$ 是數列1, 1, 1, …之生成函數。
$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} (-z)^i$	$\frac{1}{1+z}$ 是數列1, -1, 1, -1, …之生成函數。
$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots$	1. $\frac{1}{(1-z)^2}$ 是數列1,2,3,…之生成函數。 2. $\frac{z}{(1-z)^2}$ 是數列0,1,2,3,…之生成函數。
$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$	
$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} H_i^n z^i$	H_i^n 的生成函數為 $\frac{1}{(1-z)^n}$ 即重覆選取最多選n件之生成函數
$\frac{1}{(1+z)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n H_i^n z^i$	

2.2 生成函數的基本運算法則

令a, b, c為數值函數，A(z), B(z), C(z)為對應之生成函數。

(1) $b = \alpha a \Leftrightarrow B(z) = \alpha A(z)$	Ex: $b_r = 3^{r+2}, r \ge 0$，則 $B(z) = \frac{9}{1-3z}$.
(2) $c = a + b \Leftrightarrow C(z) = A(z) + B(z)$	Ex: $c_r = 2^r + 3^r, r \ge 0 \Rightarrow C(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1-3z}$ Ex: $A(z) = \frac{2}{1-4z^2}$, 求a_r. Sol: $A(z) = \frac{2}{1-4z^2} = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{1+2z}$ $\therefore a_r = 2^r + (-2)^r, \quad r \ge 0$ $= \begin{cases} 0, & r \text{ is odd} \\ 2^{r+1}, & r \text{ is even} \end{cases}$
(3) $b_r = \alpha^r a_r \Leftrightarrow B(z) = A(\alpha z)$	Ex: $b_r = \alpha^r \Leftrightarrow B(z) = \frac{1}{1-\alpha z}$
(4) $b = S^i a \Leftrightarrow B(z) = z^i A(z)$	Ex: $A(z) = \frac{z^4}{1-2z} \Rightarrow a_r = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le 3 \\ 2^{r-4}, & r \ge 4 \end{cases}$
(5)	Ex: $a_r = 3^{r+2}, \quad r \ge 0$

$b=S^{-i}a \Leftrightarrow$ $B(z)=z^{-i}\left(A(z)-a_0-a_1z-\ldots-a_{i-1}z^{i-1}\right)$	$\Rightarrow A(z)=z^{-2}\left(\frac{1}{1-3z}-1-3z\right)$ $=z^{-2}\times\frac{9z^2}{1-3z}=\frac{9}{1-3z}$
(6) $c=a*b \Leftrightarrow C(z)=A(z)B(z)$	$\because\ c_r=a_0b_r+a_1b_{r-1}+a_2b_{r-2}+\ldots+a_{r-1}b_1+a_rb_0$ 等於下列兩級數乘積的z^r的係數 $\left(a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_rz^r+\ldots\right)\times$ $\left(b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots+b_rz^r+\ldots\right)$ $\therefore$ C(z) = A(z)B(z)
(7) $c_r=\sum_{i=0}^{r}a_i$, (即c為a的部分和函數) 求C(z) = ?	c = a*b, 其中b = (1, 1, 1, ….) $\Rightarrow\ C(z)=A(z)\times\frac{1}{1-z}$ ※$\frac{1}{1-z}$也稱為求和算子

例1: 求(1, 2, 3, 4, …, r, …) 之生成函數。

Sol:

$$c_r=\sum_{i=0}^{r}a_i,\quad a_i=1, i\geq 0$$

$$\therefore C(z)=\frac{A(z)}{1-z}$$

又 $A(z)=\frac{1}{1-z}$

$$\therefore C(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$$

例2: (1) 求(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …, r^2, …) 之生成函數。

(2) 求(1) 的部分和生成函數。

(3) 求$1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2$之和。

Sol:

(1)

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+\ldots$$

$$\Rightarrow\quad \frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right]=1+2^2z+3^2z^2+4^2z^3+\ldots$$

$$\Rightarrow \quad z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right] = z + 2^2 z^2 + 3^2 z^3 + \ldots$$

$\Rightarrow$ $(0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, r^2, \ldots)$ 之生成函數為

$$z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(1-z)^2}\right] = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

(2) 部分和數值函數為$(0^2, 1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \ldots)$，其生成函數為

$$\frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \times \frac{1}{1-z} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^4}$$

(3) $\dfrac{z(1+z)}{(1-z)^4}$ 的無窮級數展開式中，z^r的係數為

$$
\begin{aligned}
& H_{r-1}^4 + H_{r-2}^4 \\
&= C_{r-1}^{r+2} + C_{r-2}^{r+1} \\
&= C_3^{r+2} + C_3^{r+1} \\
&= \frac{(r+2)(r+1)r}{6} + \frac{(r+1)r(r-1)}{6} \\
&= \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}
\end{aligned}
$$

3. 生成函數在組合學上的應用

由三相異物a,b,c選一件的方法數有3種，即a或b或c，用符號a+b+c表示('+'代表或)；同理，選二件的方法可以用ab+bc+ca表示('×'代表且)；選二件的方法可以用abc表示。

觀察下式：

$$(1+az)(1+bz)(1+cz) = 1 + (a+b+c)z + (ab+bc+ca)z^2 + (abc)z^3$$

發現係數恰分別為選0件、選1件、選2件、選3件的方式。因此，(1+az)代表a元素的兩種選擇方式：選a或不選a，z則作為標示使用。故，(1+az)(1+bz)(1+cz)代表三相異物a,b,c的不同選法，展開之多項式常數項就代表選0物的情況，一次項就代表選1物的情況，二次項就代表選2物的情況，三次項就代表選3物的情況。若所求為方法數，即令$a = b = c = 1$，則z^i的係數就代表選i件的不同方法數。

推廣：$(1+z+z^2+z^3)$可視為由一箱中選物，每箱最多選三件之生成函數。

說明例：

包含x及y的10種相異物中，設$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$為一數值函數，$a_r$代表由10種相異物中選取r件的可能組合，但x最多只能選2件，y最多只能選3件，其他8種，每一種最多選1件，其生成函數可表為 $A(z) = (1+z+z^2)(1+z+z^2+z^3)(1+z)^8$

說明例：

設a_r代表由n種相異物中選取r件，每件皆可重複選取，因此a_r等於$(1+z+z^2+z^3+\dots)^n$展開式中z^r的係數，又

$$\left(1+z+z^2+\dots\right)^n=\left(\frac{1}{1-z}\right)^n=(1-z)^{-n}$$

$$\therefore \quad a_r=C_r^{-n}(-1)^r=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-1)^r$$

$$=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-r)!}=C_r^{n+r-1}=H_r^n$$

※ 重複組合H_r^n之生成函數為$\left(\frac{1}{1-z}\right)^n$

※ $C_r^{-n}=(-1)^r H_r^n$

例3：n類相異物中，可重複選取r件，但每類至少選一件，請問有多少種選法？

Sol:

生成函數為

$$\left(z+z^2+\dots\right)^n=z^n\left(1+z+z^2+\dots\right)^n=z^n\left(\frac{1}{1-z}\right)^n$$

$$=z^n\sum_{i=0}^{\infty}H_i^n z^i=\sum_{i=0}^{\infty}H_i^n z^{i+n}$$

故所求方法數即x^r之係數$=H_{-n+r}^n=C_{-n+r}^{r-1}=C_{n-1}^{r-1}$

例4：4人，每人擲骰一次，求點數和為17之可能方法數。

Sol:

生成函數為

$$\left(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6\right)^4$$

$$=z^4\left(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5\right)^4$$

$$=z^4\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^4$$

$\therefore$所求為$\left(1-z^6\right)^4(1-z)^{-4}$之$z^{13}$項的係數，即

$$C_0^4H_{13}^4+C_1^4(-1)H_7^4+C_2^4(-1)^2H_1^4$$

$$=C_{13}^{16}-4C_7^{10}+6C_1^4=C_3^{16}-4C_3^{10}+6\times4$$

$$=\frac{16\times15\times14}{3\times2}-4\times\frac{10\times9\times8}{3\times2}+24=104$$

例5：將2t+1個彈珠置入3相異箱中，每箱的彈珠個數都不超過t個，請問有多少種放置的方法?

Sol:

$A(z)=(1+z+z^2+\dots+z^t)^3$的展開式中$z^{2t+1}$的係數即為所求

$$A(z)=\left(\frac{1-z^{t+1}}{1-z}\right)^3=\left(1-3z^{t+1}+3z^{2t+2}-z^{3t+3}\right)(1-z)^{-3}$$

z^{2t+1}的係數=$(1-z)^{-3}$展開式中z^{2t+1}的係數－3×z^t的係數，即

$$H_{2t+1}^3-3H_t^3=C_{2t+1}^{2t+3}-3C_t^{t+2}=C_2^{2t+3}-3C_2^{t+2}$$
$$=\frac{(2t+3)(2t+2)}{2}-\frac{3(t+2)(t+1)}{2}=\frac{(t+1)(4t+6-3t-6)}{2}$$
$$=\frac{t(t+1)}{2}$$

例6：求$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$的x^8之係數。

Sol:

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$\Rightarrow 1 = A(x-2)^2 + B(x-2)(x-3) + C(x-3)$

解上式得 $A=\left.\frac{1}{(x-2)^2}\right|_{x=3}=1,\quad B=\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-3}\right)\right]_{x=2}=\left[\frac{-1}{(x-3)^2}\right]_{x=2}=-1,$

$C=\left.\frac{1}{x-3}\right|_{x=2}=-1,$

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\left(\frac{-1}{3}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^i+\left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^i-\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}H_i^2\left(\frac{x}{2}\right)^i$$

$\Rightarrow$ x^8之係數$\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(-\frac{1}{4}\right)C_8^{2+8-1}\left(\frac{1}{2}\right)^8$ = 0.0258281

例7：由A, B, C三個字母中重複選出n個字母，使之含有偶數個A的方法數為何？

Sol: 生成函數A(x) = (A為偶數之生成函數)(B之生成函數)(C之生成函數)

$$= (1+x^2+x^4+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)$$
$$=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{1-x}\right)^3$$
$$=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

其中 $A=\left.\left(\frac{1}{1-x}\right)^3\right|_{x=-1}=\frac{1}{8}$

$$B=\left.\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\right|_{x=1}=\left.\frac{1}{2}\frac{-1/2}{(x+1)^3}\right|_{x=1}=-\frac{1}{8}$$

$$C=\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{1+x}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{1}{(1+x)^2}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{4}$$

$$D=\frac{-1}{1+x}\bigg|_{x=1}=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore\ \mathrm{A(x)}=\frac{1/8}{1+x}+\frac{-1/8}{x-1}+\frac{1/4}{(x-1)^2}+\frac{-1/2}{(x-1)^3}=\frac{1/8}{1+x}+\frac{1/8}{1-x}+\frac{1/4}{(1-x)^2}+\frac{1/2}{(1-x)^3}$$

所求之方法數= x^n項之係數

$$=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}H_n^2+\frac{1}{2}H_n^3=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}(n+1)+\frac{1}{2}C_2^{n+2}$$

4. 整數分割：將整數分割成若干非負整數之和。此問題相當於將n件相同物分配置n個相同的箱子，每箱可兼得的問題。整數分割的方法數表為p(n)

p(1) = 1 分割法為：(1)

p(2) = 2 分割法為：(1, 1)、(2, 0)

p(3) = 3 分割法為：(1, 1, 1)、(1, 2)、(0, 3)

p(4) = 5 分割法為：(1, 1, 1, 1)、(1, 1, 2)、(1, 3)、(2, 2)、(0, 4)

4.1 數列{p(0), p(1), p(2), …, p(n)}之生成函數

多項式$1+x+x^2+\ldots+x^n$中x^k項的係數代表：n的分割中含有k個1的方法數。同理，$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots$中，$x^{2k}$項的係數是：任意整數$n\geq 2k$的一個包含k個2之分割的方法數。

∴數列{p(0), p(1), p(2), …, p(n)}之生成函數為

$$\begin{aligned}F(x)=&(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^r+\ldots)\times\\&(1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2r}+\ldots)\times\\&(1+x^3+x^6+x^9+\ldots+x^{3r}+\ldots)\times\\&\vdots\\=&\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^n)}\end{aligned}$$

4.2 **奇數分割的生成函數**：$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots(1-x^{2n+1})}$

4.3 **偶數分割的生成函數**：$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\ldots(1-x^{2n})}$

例8：證明對任意正整數做分割，**各項均異**的分割數等於**奇數分割**的分割數。

【證明】

因為 $P_d(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^r)\ldots$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots\frac{1-x^{2r}}{1-x^r}\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}=P_o(x)$$

即兩者的生成函數相同，所以分割數相同

[注意事項] 例如6=6=5+1=4+2=3+2+1有4種每項皆不同的分割，另外，

6=5+1=3+3=3+1+1+1=1+1+1+1+1+1亦有4種每項皆為奇數的分割。

5. 指數生成函數：

(1) 對應數列$a_0, a_1, a_2..., a_n, ...$ 稱

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2/2! + a_3x^3/3! + \dots$ 為此數列之指數生成函數。

(2) $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

(3) $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^r = \sum_{r=0}^{n} P_r^n \frac{x^r}{r!}$

∴ $(1+x)^n$ 既是C_r^n的一般生成函數，也是P_r^n的指數生成函數。

※指數生成函數可以用來求解排列的問題。

(4) 常見數列的生成函數：

數列	一般生成函數	指數生成函數
(1,1,...)	$\frac{1}{1-x}$	e^x
(1,-1,1,-1,...)	$\frac{1}{1+x}$	e^{-x}
(1,0,1,0,...)	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$
(0,1,0,1,...)	$\frac{x}{1-x^2}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
(1,2,3,...)	$\frac{1}{(1-x)^2}$	
(0,1,2,3,...)	$\frac{x}{(1-x)^2}$	
$(1^2,2^2,3^2,...)$	$\frac{1+x}{(1-x)^3}$	
$(0^2,1^2,2^2,3^2,...)$	$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$	
$(1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},...)$		$\frac{e^x-1}{x}$
C_r^n	$(1+x)^n$	
重複組合H_r^n	$\left(\frac{1}{1-z}\right)^n$	
P_r^n		$(1+x)^n$
n相異物重複排列		e^{nx}
骰子(1,2,…,6)	$(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)$	

例9：求由n相異物中重複選取r件之方法數。

Sol: 其指數生成函數

$$= \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^n = \left(e^x\right)^n = e^{nx}$$

$$= \left(1+\frac{nx}{1!}+\frac{(nx)^2}{2!}+\dots\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{n^r}{r!}x^r$$

∴方法數為n^r

※ n相異物重複排列的指數生成函數為e^{nx}

例10：4元r序列中，1, 2, 3都至少出現一次的有多少個？

Sol: 相當於：由4種相異物中重複選出r件的排列，其中有3種至少要選1次。

其指數生成函數

$$= \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)^3 = e^x\left(e^x-1\right)^3 = e^{4x}-3e^{3x}+3e^x-e^x$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4x)^r}{r!}-3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(3x)^r}{r!}+3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2x)^r}{r!}-\sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{4^r-3\times 3^r+3\times 2^r-1}{r!}x^r$$

∴有$4^r-3^{r+1}+3\times 2^r-1$個

例11：4元r序列中，0出現偶次的有多少個？

Sol: 0出現偶次的之指數生成函數

$$= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\dots\right) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

※ 0出現奇次的之指數生成函數為$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

其他數字之指數生成函數為e^x

∴ 問題之指數生成函數為

$$A(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\times e^{3x} = \frac{e^{4x}+e^{2x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty}\left(4^r+2^r\right)\frac{x^r}{r!}$$

∴ 問題之解為$\dfrac{4^r+2^r}{2}$

例12：4元r序列中，0及1皆出現偶次的有多少個？

Sol: 問題之指數生成函數為

$$A(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\times e^{2x} = \frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{4} = \frac{1}{4}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\left(4^r+2\times 2^r\right)\frac{x^r}{r!}+1\right]$$

$$= 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{4^r+2\times 2^r}{4}\times\frac{x^r}{r!}$$

∴ 問題之解為$\dfrac{4^r+2^{r+1}}{4} = 4^{r-1}+2^{r-1}$