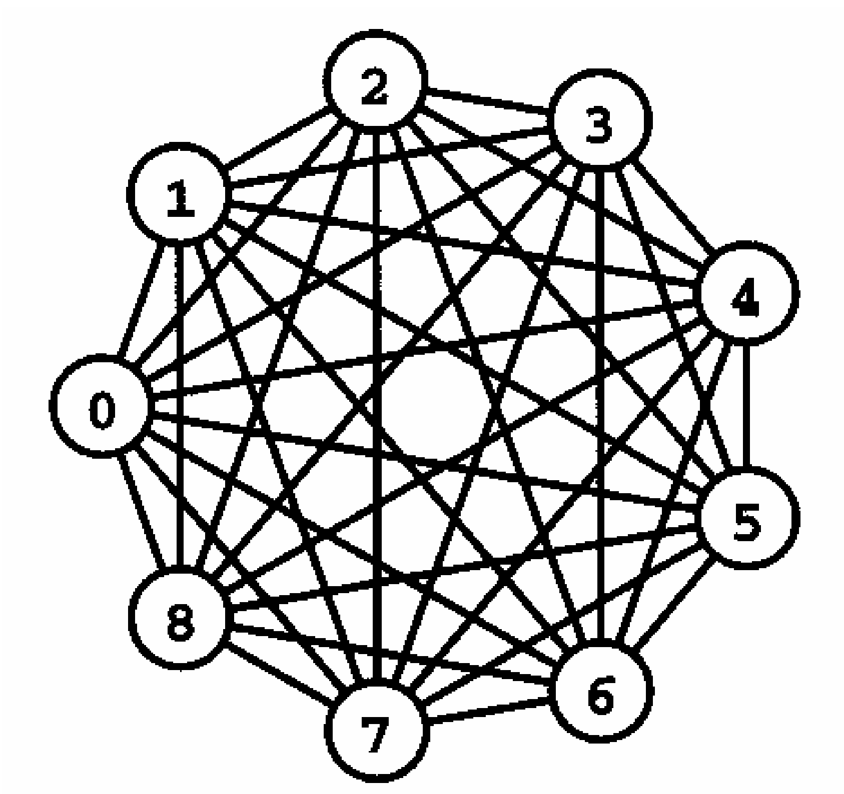
關係與函數



黎 靖 編著

南台科大電子系

一、關係(Relation)

1. 卡氏積：

(1) 定義：$A\times B=\{(a, b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$。卡氏積為二元關係之宇集。

> Example: $A=\{a, b\}$, $B=\{a, c, d\}$,
>
> $A\times B=\{(a, a), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d)\}$
>
> $B\times A=\{(a, a), (a, b), (c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$
>
> $A\times B\neq B\times A$

(2) 恆等式：×對$\cap$、$\cup$、-、$\oplus$有分配律

$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$；$(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$。

$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$；$(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$。

$(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$

$(A\oplus B)\times C = (A\times C)\oplus(B\times C)$

$(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

$|A\times B| = |A| \times |B|$

> **例1：**
>
> Prove： (1) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$ (2) $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$
>
> (3) $(A\oplus B)\times C = (A\times C)\oplus(B\times C)$
>
> Pf:
>
> (1) $\forall (x, y) \in A\times(B\cap C)$
>
> $\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in(B\cap C)$
>
> $\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C$
>
> $\Leftrightarrow (x, y) \in(A\times B) \wedge (x, y) \in(A\times C)$
>
> $\Leftrightarrow (x, y) \in(A\times B)\cap(A\times C)$
>
> (2) $\forall (x, y) \in (A\times C)-(B\times C)$
>
> $\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C)-(x \in B \wedge y \in C)$
>
> $\Leftrightarrow x \in (A-B) \wedge y \in C$
>
> $\Leftrightarrow (x, y) \in (A-B)\times C$
>
> (3) $(A\times C)\oplus(B\times C) = [(A\times C)\cup(B\times C)]-[(A\times C)\cap(B\times C)]$
>
> $= (A\cup B)\times C-(A\cap B)\times C$
>
> $= [(A\cup B)-(A\cap B)]\times C$
>
> $= (A\oplus B)\times C$

2. 二元關係(Binary relation)：A×B的任一子集為A至B的一個二元關係。

1. 例: 定義一個從 Z 到 Z 的 binary relation | 如下: a | b 表示 "a 這個整數整除 b 這個整數".
2. 例: 定義一個從 M 到 H 的 binary relation F 如下: a F b 表示 "a 這個男子為 b 這個人的父親".
3. 例: 定義一個從 AP 到 OS 的 binary relation R 如下: a R b 表示 "a 這個應用程式可以在 b 這個作業系統上執行".
4. 例: 定義一個從 S 到 S 的 binary relation RA 如下: a RA b 表示 "a 這顆星球繞著 b 這顆星球轉".
5. 例: 定義一個從 A 到 P 的 binary relation E 如下: a E b 表示 "a 這種動物喜歡吃 b 這種植物".
6. 其他例子: <, <=, ..., "a 認識 b", "副程式 a 呼叫副程式 b", "a 是 b 的父親或母親", ...

3. 表示法：$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, R_α 為A至B之一關係

(1) 集合表示法：列舉出所有滿足 a R b 的 (a, b)。

(2) 矩陣表示法：關係矩陣 (Relation Matrix)

定義 $M_\alpha = [m_{ij}]$為 m×n 矩陣, 其中 $m_{ij} = \begin{cases} 1, if\ (a_i, b_j) \in R_\alpha \\ 0, if\ (a_i, b_j) \notin R_\alpha \end{cases}$,則稱 M_α 為 R_α 的關係矩陣。

※$(a_i, b_j) \in R_\alpha$ 也常表示為 $a_i R_\alpha b_j$ 。

(3) 有向圖形表示法：

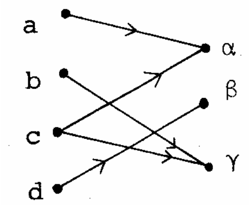
A與B中之每一個元素用一個節點表示，若 $(a_i, b_j) \in R_\alpha$，則連接一條 a_i 至 b_j之有向邊。

例2：A={a, b, c, d}, B={α, β, γ}, R={(a, α), (b, γ), (c, α), (c, γ), (d, β)}

(1) 關係矩陣表示法：

	α	β	γ
a	1	0	0
b	0	0	1
c	1	0	1
d	0	1	0

(2) 有向圖形表示法：

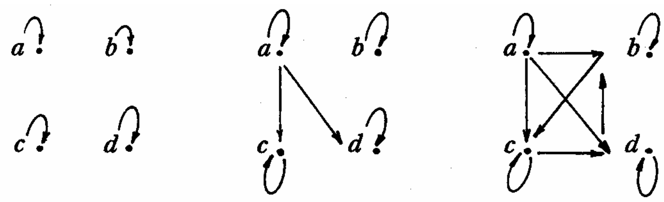


4. 關係之性質：

關係	定義	特徵	範例
反身性 reflexive	∀a∈A, (a, a) ∈R	關係矩陣的主對角線皆為1 有向圖形的節點都有自迴路	⊆、≤、≥、整除
非反身性 irreflexive	∀a∈A, (a, a) ∉R	關係矩陣的主對角線皆為0 有向圖形的節點都沒有自迴路	<、>、≠
對稱性 symmetric	∀ a, b∈A, (a, b) ∈R⇔ (b, a) ∈R	關係矩陣為對稱矩陣 有向圖形的邊都是雙向的	=、相鄰

非對稱性 asymmetric	$\forall$ a, b$\in$A, (a, b) $\in$R$\Rightarrow$ (b, a) $\notin$R	關係矩陣的主對角線皆為0且 任兩對稱點不可同時為1	$<$、$>$
反對稱性 antisymmetric	$\forall$ a, b$\in$A, (a, b) $\in$R $\wedge$ (b, a) $\in$R $\Rightarrow$ a = b	關係矩陣的主對角線可為0或 1，且任兩對稱點不可同時為1	$\leq$、$\geq$
遞移性 transitivity	$\forall$ a, b, c$\in$A, (a, b)$\in$R $\wedge$ (b, c)$\in$R $\Rightarrow$ (a, c) $\in$R	$M_R = M_{R^1}$，R^1是R的遞移延伸	$\subseteq$、$\leq$、$\geq$、$<$、$>$、$=$

例3：下列關係具反身性



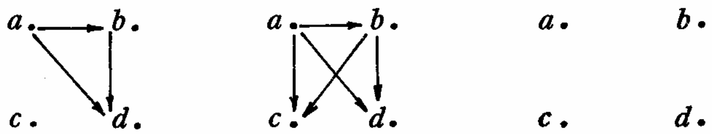
(a) (b) (c)

例4：下列關係具對稱性

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & F & F & F & F \\
b & F & F & T & F \\
c & F & T & F & F \\
d & F & F & F & F
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & F & T & F & T \\
b & T & F & T & F \\
c & F & T & F & F \\
d & T & F & F & F
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & F & F & F & F \\
b & F & F & F & F \\
c & F & F & F & F \\
d & F & F & F & F
\end{array}
$$

(a) (b) (c)

例5：下列關係具遞移性



(a) (b) (c)

例6：證明ϕ具有對稱性及遞移性，但沒有反身性。

解

$\phi = \{\ \}$ ∴ 沒有任何元素

(1) 反身性定義"$\forall a \in A,\ a\,\alpha\,a$"但因 ϕ 沒有任何元素 $\forall a \notin \phi$ 所以沒有反身性。

(2) 對稱性定義"$\forall a, b \in A$ 若 $a\,\alpha\,b \Leftrightarrow b\,\alpha\,a$"

因 ϕ 沒有元素，所以不違反對稱性。

(∵ 依邏輯 $p \Leftrightarrow q$，若 p，q 爲 False 時，命題恒真)

(3) 遞移性定義"$\forall a,\ b,\ c \in A$ 若 $a\,\alpha\,b,\ b\,\alpha\,c \Rightarrow a\,\alpha\,c$"因 ϕ 沒有 $a\,\alpha\,b$，$b\,\alpha\,c$，

所以遞移性亦成立。

(∵ 依邏輯 $p \Rightarrow q$，若 p 爲 false 時，命題恒真)

5. 關係的運算：

(1) 合成 (Composition)：

1. 定義：若 α：A→B，β：B→C，則關係α及β之合成記為 $\alpha\beta$，A$\alpha\beta$C表示「∀a∈A、c∈C，∃b∈B，s.t. aαb及bβc」。

例：

1. 「a 這學期修 b 這門課」與「b 這門課在星期 c 這天有課」的 composition 為「a 這學期在星期 c 這天有課」。
2. 「a 這個出版社曾經出版過 b 這本書」與「b 這本書可以算是 c 這類的書」的 composition 為「a 這個出版社曾經出版過 c 這類的書」。
3. 「a 是 b 的兒子或女兒」與「b 是 c 的父親或母親」的 composition 為「a 是 c 的兄弟姊妹」。
4. 「a 是 b 的父親或母親」與「b 是 c 的兒子或女兒」的 composition 為「a 是 c 的夫妻或自己」。

例7：

令 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}, C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

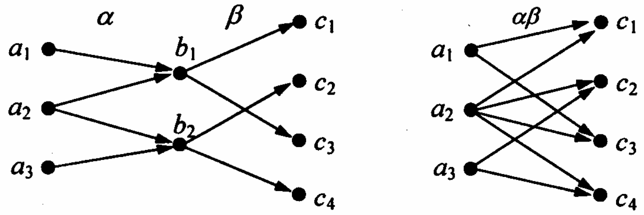
$R_\alpha = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$

$R_\beta = \{(b_1, c_1), (b_1, c_3), (b_2, c_2), (b_2, c_4)\}$

求 $R_{\alpha\beta} = ?$

【解】

以圖形表示法如下：



即 $R_{\alpha\beta} = \{(a_1, c_1), (a_1, c_3), (a_2, c_1), (a_2, c_2), (a_2, c_3), (a_2, c_4), (a_3, c_2), (a_3, c_4)\}$

2. 有結合性(Associative)：$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$；$(M_\alpha M_\beta)M_\gamma = M_\alpha(M_\beta M_\gamma)$。

3. $M_{\alpha}M_{\beta}=M_{\alpha\beta}$：關係矩陣的乘積遵行布林乘積(把一般矩陣乘法的定義當中的數字乘法改成 and， 把數字加法改成 or)。

4. 不具交換性: $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ 。

5. $M_{\alpha^n}=(M_{\alpha})^n$ 。

例8：

令 $A=\{a_1, a_2, a_3\}, B=\{b_1, b_2, b_3\}, C=\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$

$R_{\alpha}=\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_3, b_3)\}$

$R_{\beta}=\{(b_1, c_1), (b_1, c_2), (b_1, c_4), (b_2, c_1), (b_2, c_3), (b_2, c_4), (b_3, c_1), (b_3, c_3)\}$

求 M_{α}, M_{β} 及 $M_{\alpha\beta}$

【解】

$$M_{\alpha}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}, M_{\beta}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{\alpha\beta}=M_{\alpha}M_{\beta}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

(2) 反關係(Inverse Relation)：α ：A→B，α之反關係α^{-1}：B→A，表示「$a\in A$，$b\in B$，$a\alpha b \Leftrightarrow b\alpha^{-1}a$」。

1. $M_{\alpha^{-1}}=(M_{\alpha})^T$ 。$(M_{\alpha})^T$ 為M_{α}之轉置矩陣。

2. $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$；$M_{(\alpha^{-1})^{-1}}=M_{\alpha}$ 。

3. $\alpha^{-1}=\beta^{-1} \Leftrightarrow \alpha=\beta$；$M_{\alpha^{-1}}=M_{\beta^{-1}} \Leftrightarrow M_{\alpha}=M_{\beta}$ 。

4. $\alpha^{-1}\subseteq\beta^{-1} \Leftrightarrow \alpha\subseteq\beta$ 。 5. $(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$ 。

(3) 交聯集：

1. $(\alpha\cap\beta)^{-1}=\alpha^{-1}\cap\beta^{-1}$

2. $M_{\alpha\cap\beta}=M_{\alpha}\wedge M_{\beta}$； $M_{\alpha\cup\beta}=M_{\alpha}\vee M_{\beta}$ 。

3. $M_{(\alpha\cap\beta)^{-1}}=M_{\alpha^{-1}}\wedge M_{\beta^{-1}}=(M_{\alpha})^T\wedge(M_{\beta})^T$；

$M_{(\alpha\cup\beta)^{-1}}=M_{\alpha^{-1}}\vee M_{\beta^{-1}}=(M_{\alpha})^T\vee(M_{\beta})^T$ 。

例9：

$$M_{\alpha}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{\beta}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$，求$M_{\alpha\beta}$、$M_{\alpha\cap\beta}$、$M_{\alpha\cup\beta}$。

Sol:

$$M_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{\alpha\cap\beta}=M_{\alpha}\wedge M_{\beta}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{\alpha\cup\beta}=M_{\alpha}\vee M_{\beta}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

4. α,β：A→A為兩個A上的二元關係

(1) 若α,β具反身性，則$\alpha\cap\beta$及$\alpha\cup\beta$具反身性。

(2) 若α,β具對稱性，則$\alpha\cap\beta$及$\alpha\cup\beta$具對稱性。

(3) 若α,β具遞移性，則$\alpha\cap\beta$具遞移性。

(4) 若α,β具遞移性，則$\alpha\cup\beta$不一定具遞移性。

Pf:

(1)因α,β具反身性

$\Rightarrow \forall a\in A, a\,\alpha\,a$ 且 $a\,\beta\,a$

$\Rightarrow a\,(\alpha\cap\beta)\,a$ 且 $a\,(\alpha\cup\beta)\,a$

故$\alpha\cap\beta$及$\alpha\cup\beta$具反身性

(2) $\forall a, b\in A, a\,(\alpha\cap\beta)\,b$

$\Rightarrow a\,\alpha\,b$ 且 $a\,\beta\,b$

因為α,β具對稱性

$\Rightarrow b\,\alpha\,a$ 且 $b\,\beta\,a$

$\Rightarrow b\,(\alpha\cap\beta)\,a$

所以$\alpha\cap\beta$具對稱性

同理可證$\alpha\cup\beta$具對稱性

(3) $\forall a, b, c\in A, a\,(\alpha\cap\beta)\,b$ 且 $b\,(\alpha\cap\beta)\,c$

$\Rightarrow (a\,\alpha\,b$ 且 $a\,\beta\,b)$且$(b\,\alpha\,c$ 且 $b\,\beta\,c)$

$\Rightarrow (a\,\alpha\,b$ 且 $b\,\alpha\,c)$且$(a\,\beta\,b$ 且 $b\,\beta\,c)$

因α,β具遞移性

$\Rightarrow a\,\alpha\,c$ 且 $a\,\beta\,c$

$\Rightarrow a\,(\alpha\cap\beta)\,c$

所以$\alpha\cap\beta$具遞移性

(4)

若α, β具遞移性，則$\alpha \cup \beta$未必具遞移性，反例如下：

令 $A = \{1, 2, 3\}$

$R_\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$

$R_\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$

則 R_α, R_β具遞移性

另外，$R_{\alpha\cup\beta} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

因為$(1, 2), (2, 3) \in R_{\alpha\cup\beta}$，但$(1, 3) \notin R_{\alpha\cup\beta}$

即 $R_{\alpha\cup\beta}$不具遞移性

6. 相容關係(Compatibility Relation)：

1. 定義：反身且對稱關係；$\gamma = \alpha\alpha^{-1}$；$\gamma$可分解為$\alpha$與$\alpha^{-1}$之合成。

   ＊任意關係α的合成關係$\alpha\alpha^{-1}$必為相容關係。

例10：

令 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$

$\alpha : A \to B$ 為一關係且

$$M_\alpha = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{則 } M_{\alpha\alpha^{-1}} = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\alpha\alpha^{-1}$具反身性、對稱性，故為 A 上之一相容關係

2. 相容關係類(Compatibility Class)：(A, γ)為一相容關係集，若A之一子集中任兩元素均具γ相關，則此子集為一相容關係類。相容關係類具等價關係。

3. 求相容關係類之方法：

   (1) 將關係以簡單圖形表示。

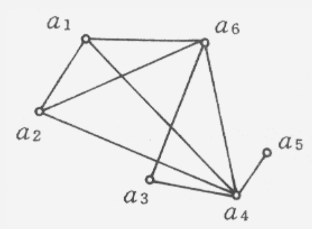
   (2) 圖上的任一完全子圖上的節點即為一相容關係類。

4. 最大相容關係類：一個相容關係類不能被其他相容關係類所包含，稱之。

5. Complete cover：(A, γ)為一相容關係集，$C_\gamma(A)$ = 最大相容關係類之集合，若$\bigcup C_\gamma(A) = A$，則稱$C_\gamma(A)$相對於γ為Complete cover。

例11：

$$\text{令 } M_\gamma = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ 則}$$



(1) $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_2, a_6\}$為相容關係類但不為最大相容關係類

(2) $\{a_1, a_2, a_4, a_6\}$, $\{a_3, a_4, a_6\}$, $\{a_4, a_5\}$為最大相容關係類

(3)令 $C_\gamma(A) = \{\{a_1, a_2, a_4, a_6\}, \{a_3, a_4, a_6\}, \{a_4, a_5\}\}$, 則 $C_\gamma(A)$為 A 上之一完全覆蓋

7. 等價關係(Equivalence relation)：反身、對稱且遞移關係。'='即為一等價關係。

Example:

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

2. 分割(partition): 集合A之一分割集是A中一些非空子集(稱為block)所成之集合，以 $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$表之，且滿足下列兩條件：

(1) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$　　(2) $A_i \cap A_j = \phi$

3. 等價關係可造成一分割集(partition set)。

4. 若α及β是等價關係，則$\alpha \cap \beta$也是，但$\alpha \cup \beta$不是。

5. 設π_1和π_2為A上兩分割，R_1和R_2分別為對應π_1和π_2之等價關係。

(1) $\pi_1 \cdot \pi_2$表示對應$R_1 \cap R_2$的一分割。

(2) $\pi_1 + \pi_2$表示對應$(R_1 \cup R_2)^+$的一分割，$(R_1 \cup R_2)^+$為等價關係。

例12： A={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k}，$\pi_1 = \{\overline{abcd}, \overline{efg}, \overline{hi}, \overline{jk}\}$，$\pi_2 = \{\overline{abch}, \overline{di}, \overline{efjk}, \overline{g}\}$，則$\pi_1$和$\pi_2$為A上之兩分割，並且$\pi_1 \cdot \pi_2 = \{\overline{abc}, \overline{d}, \overline{ef}, \overline{g}, \overline{h}, \overline{i}, \overline{jk}\}$及$\pi_1 + \pi_2 = \{\overline{abcdhi}, \overline{efgjk}\}$.

例13：試求集合(1，2，3，4，5)之所有分割集的種類。

【解】

要分割 5 個元素有下列幾種情況

(1)只含一個 5 個元素的分割，即$\{1, 2, 3, 4, 5\}$有$\binom{5}{5} = 1$種

(2)分割為 4–1 有$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$種

(3)分割為 3–2 有$\binom{5}{3}\binom{2}{2} = 10$種

(4)分割為 3–1–1 有$\dfrac{\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = \binom{5}{3} = 10$種

(5)分割為 2–2–1 有$\dfrac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{2!} = 15$種

(6)分割為 2–1–1–1 有$\binom{5}{2} = 10$種

(7)分割為 1–1–1–1–1 有 1 種

所以共有 $1 + 5 + 10 + 10 + 15 + 10 + 1 = 52$ 種

8. 同餘等價類(Congruence modulo relation)：

1. 同餘：若n | (a–b)，則a，b對n同餘，記作$a \equiv_n b$或$b \equiv a \bmod n$。同餘為等價關係。

【證明】

(1)反身性 ：

$\forall a \in \boldsymbol{Z}, n \mid a - a$

$\Rightarrow a \equiv_n a$

(2)對稱性 ：

$\forall a, b \in \boldsymbol{Z}, a \equiv_n b$

$\Rightarrow n \mid a - b$

$\Rightarrow a - b = nk$, for some $k \in \boldsymbol{Z}$

$\Rightarrow b - a = n(-k)$, 其中$-k \in \boldsymbol{Z}$

$\Rightarrow n \mid b - a$

$\Rightarrow b \equiv_n a$

(3)遞移性 ：

$\forall a, b, c \in \boldsymbol{Z}, a \equiv_n b$ 且 $b \equiv_n c$

$\Rightarrow n \mid a - b$ 且 $n \mid b - c$

$\Rightarrow a - b = nk, b - c = nl$, for some $k, l \in \boldsymbol{Z}$

$\Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) = nk + nl = n(k + l)$, 其中 $k + l \in \boldsymbol{Z}$

$\Rightarrow n \mid a - c$

$\Rightarrow a \equiv_n c$

2. [a]：所有對a同餘之整數的集合。$[a] = \{b \mid b \equiv_n a，a, b \in Z\}$

3. Z_n：$\equiv_n$所形成之等價類稱為同餘等價類，對應之分割集以Z_n表示。

4. Z_n = {[0], [1], [2], ..., [n-1]}。

9. 偏序關係(Partial Order Relation)：

1. α ：A→A，且A具反身、反對稱且遞移關係，則稱A具偏序關係。

例14：偏序關係範例：

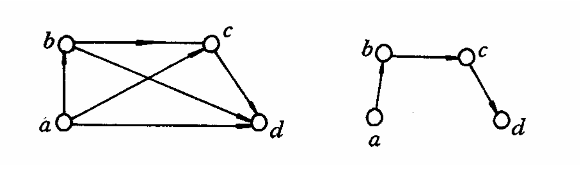
	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	0	1	1	0	1
c	0	0	1	0	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

2. 偏序集(Partial Ordering Set, POS)：由集合及偏序關係構成。
3. 常見之偏序集：(冪集合, ⊆)、(Z^+, ≤)、(Z^+, ≥)、(Z^+, 整除)、絡(lattice)、布林代數。
4. 若 R 為一個 partial order，則 R^{-1} 也是一個 partial order，稱為 R 的 dual。例如 ≤ 的 dual 是 ≥； ⊂ 的 dual 是 ⊃； "a 是 b 的因數" 的 dual 是 "a 是 b 的倍數"。.
5. 一個 poset (A, R) 當中的兩個元素 a 與 b，如果 aRb 或 bRa 成立, 則稱 a 與 b 為 comparable。
6. POS 的 digraph 表示法中，每個節點都有 loop，但不會有更長的 cycle 出現。
7. Hasse diagram: 偏序集之圖形表示法，畫法如下：

(1) 繪出偏序關係之有向圖。

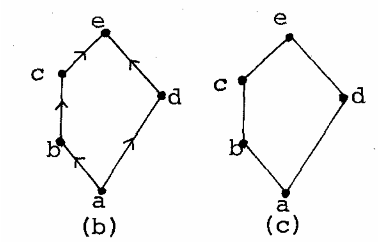
(2) 去除自迴路(因為具反身性，不畫也不會誤會)。

(3) 因為具遞移關係，所以可以用一序列箭號相連的箭號也可省略。



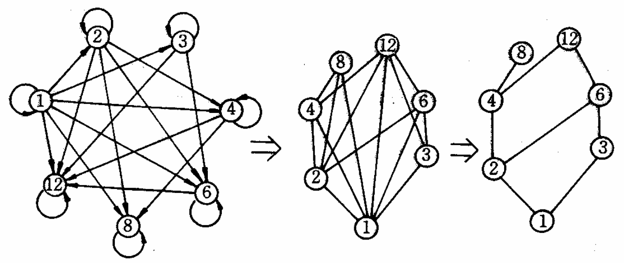
(4) 如果所有的箭號都指向同一方向，則箭號也可省略。

例15：例14之Hasse diagram如下：

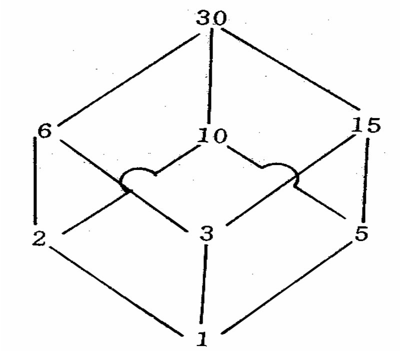


例16： 繪出下列偏序關係Hasse diagram

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 12 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 12 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



例17： Draw the Hasse diagram for the set of positive divisors of the integer 30.



5. 鏈(chain)：令 (A, ≤)為一偏序集，若A之一子集中任兩元素均相關，則此子集為一鏈，鏈長(length)代表鏈中之元素個數。

6. 散鏈(antichain)：若A之一子集中任兩元素均不相關，則此子集為一散鏈。

例18：例15中{a, b, c, e}, {a, b, c}, {a, d, e}及{a}均為鏈；{b, d}, {c, d}, {a}均為散鏈。

5. 令 (A, ≤)為一偏序集，若A為一鏈，則稱(A, ≤)為一全序集，此時之二元關係稱為全序關係。

6. 其他重要名詞：令 (A, ≤)為一偏序集，a, b, c, m, M, I, O ∈A

Predecessor	若a ≤ b, 則a是b的predecessor
Successor	若a ≤ b, 則b是a的successor
Cover	若a ≤ b 且沒有其他元素c s.t. a ≤ c ≤ b，則稱b cover a
Maximal	M是maximal, 若不存在a, s.t. M ≤ a
Minimal	m是minimal, 若不存在a, s.t. a ≤ m
Greatest	I是greatest, 若∀x∈A, x ≤ I
Least	O是least, 若∀x∈A, O ≤ x
Upper bound	若a ≤ c ∧ b ≤ c, 則c是a和b的upper bound
Lower bound	若c ≤ a ∧ c ≤ b, 則c是a和b的lower bound

※ Maximal及minimal並不唯一。

※Greatest及least不一定存在，若存在，必唯一。

例19：

j, k 都是maximal

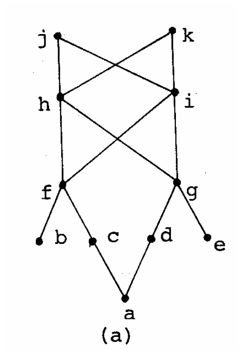
a, b, e 都是minimal

h, i, j, k 都是 g, f的upper bound

f 是 b, c的least upper bound

a, b, c, d, e, f, g, h都是h, i的lower bound

f cover b, f cover c, f 不是cover a



10. 全序關係：

1. α ：A→A為偏序關係，且∀x, y∈A，x α y或y α x (comparable)。

2. α 具全序關係，則 α^{-1} 也具全序關係。

11. 關係比較：

	反身性	對稱性	反對稱性	遞移性
相容關係	√	√		
等價關係	√	√		√
偏序關係	√		√	√
全序關係	√		√	√

12. 遞移封包(transitive closure)：

1. 遞移延伸：R是A上一關係，R的遞移延伸以 R^1 表示，是A上一關係，$R \subseteq R^1$，並且若(a, b)∈R，(b, c)∈R，則(a, c)∈R。當R具遞移性時，R^1=R。

2. 令 R^{i+1} 是 R^i 的遞移延伸，定義R的遞移封包 $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。

3. $|A| = n$，R是A上一關係，令 R^{i+1} 是 R^i 的遞移延伸，

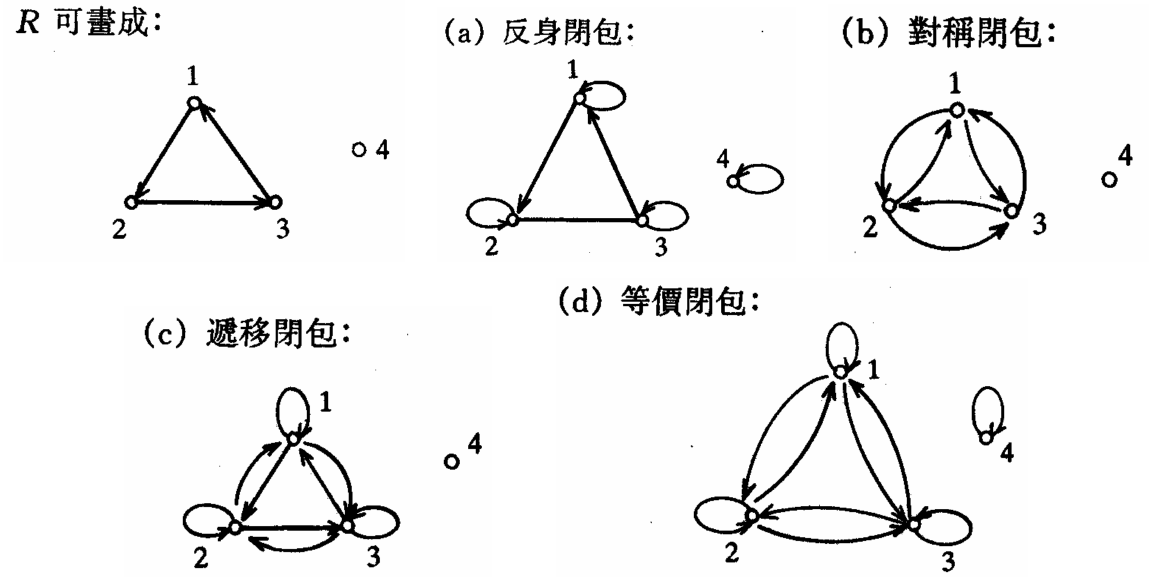
定義R的遞移封包 $R^+=R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^{n-1}$；

定義R的反身遞移封包 $R^* = R^0 \cup R^+$，其中 $R^0=\{(x, x) \mid x \in A\}$。

13. 二元關係R：A→A，|A| = n，R的封包如下：

種類	反身封包 r(R)	對稱封包 s(R)	遞移封包 R^+
意義	包含R的最小反身關係	包含R的最小對稱關係	包含R的最小遞移關係
公式	$R \cup R^0$	$R \cup R^{-1}$	$\bigcup_{k=1}^{n} R^k$
矩陣	$M_R \vee M_{R^0}$	$M_R \vee (M_R)^T$	$M_R \vee \ldots \vee M_{R^n}$

例20： A={1, 2, 3, 4}, 二元關係R={(1, 2), (2, 3), (3, 1)}



例21： A={a, b, c, d}, 二元關係R={(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)}則

R^1={(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d) }

r(R) = {(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (c, d) , (d, d)}

s(R) = {(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)}

R^+ = {(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)}

R^*= {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, d)}

14. 計數公式：二元關係R：A→A，|A| = n：

關係	個數	關係	個數	關係	個數
二元	2^{n^2}	對稱	$2^{n(n+1)/2}$	相容	$2^{n(n-1)/2}$
反身	$2^{n(n-1)}$	非對稱	$3^{n(n-1)/2}$	全序	n!
非反身	$2^{n(n-1)}$	反對稱	$2^n 3^{n(n-1)/2}$		

例22：

若$|A|=n$則

(1) A 上共有多少種反身關係?

(2) A 上共有多少種非反身關係?

【解】

(1)若α為 A 上的一反身關係，則 M_α的對角項皆為 1 有 1 種選擇，其他位置可以為 0 或 1 有 2 種選擇，故總共有2^{n^2-n}種選擇，即共有2^{n^2-n}種反身關係

(2)同理，若為非反身關係，則M_α的對角項皆為0其他位置可以為0或1，共有2^{n^2-n}種非反身關係

例23： 若$|A|=n$則

(1) A上共有多少種對稱關係? (2) A上共有多少種非對稱關係?

(3) A上共有多少種反對稱關係?

[解]

(1) 若α為A上的一對稱關係，則$M_\alpha=(M_\alpha)^T$，表示對稱於對角線的位置必需相同且對角項可以為0或1，共有$2^{1+2+\ldots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$種對稱關係。

(2) 根據定義知A的主對角項必為0，對稱於對角項的位置可以是00、01或10有三種選擇，共有$3^{1+2+\ldots+(n-1)}=3^{\frac{n(n-1)}{2}}$種非對稱關係。

(3) 反對稱關係與非對稱關係的不同只在於反對稱關係的對角項允許0或1，故共有$2^n\times 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$，種反對稱關係。

二、函數(Function)：

1. 定義：f：A→B為一函數關係(簡稱函數)，若滿足：

   1. $\forall x\in A, \exists y\in B$, s.t. $(x, y)\in f$。

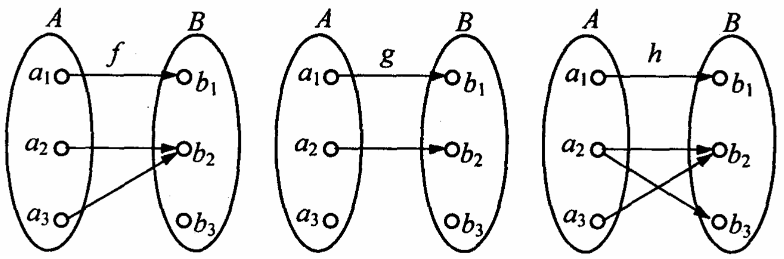
   2. $\forall x\in A$, $y, z\in B$, 若$(x, y)\in f\wedge(x, z)\in f\Rightarrow y=z$。(即不可一對多)。

   A稱為定義域(domain)、B稱為對應域(codomain)、f(A)稱為值域(range)。

※ 函數為一種特殊的關係。所以函數必為關係，但關係未必為函數。

例24：

令 $A=\{a_1, a_2, a_3\}, B=\{b_1, b_2, b_3\}$，下列何者為函數：



[解]

(1) 依照定義知f為一函數(多對一函數)

(2) g 中定義域中的元素a_3無對應，故不為函數

(3) h 中定義域中的元素 a_2 對應到二個元素 b_2、b_3 (一對多)，故不為函數

2. 基本函數： f：A→B

函數	定義
1-1 (one-to-one、injection)	$\forall a, b \in A \wedge a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$。
映成(onto、surjection)	Ran(f) = B
對射(bijection)	1-1且映成函數
重排(permutation)	A至A的對射函數

3. 函數的合成(Composition)：

f：A→B，g：B→C，且$g(C) \subseteq A$，則 f 與 g 的合成函數表為g。f：A→C，定義為 $(g \circ f)(a) = g(f(a))$，$\forall a \in A$

例25：

令 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}, C = \{w, x, y, z\}$

$f: A \to B, g: B \to C$

$f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$

$g = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = x$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = x$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = y$

$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(c) = z$

所以 $g \circ f = \{(1,x),(2,x),(3,y),(4,z)\}$

4. 可逆函數(invertible function)：

1. 若 f：A→B其反關係 f^{-1}：B→A 也是函數，則 f 為可逆函數。
2. f 為可逆函數 ⇔ f 為1-1且映成函數。
3. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$。

5. 函數的相等:

兩個函數f, g相等的條件要滿足：

(1) f 的定義域 = g 的定義域；　(2) f 的對應域 = g 的對應域

(3) f 的值域 = g 的值域；　(4) 對定義域的任一元素x, f(x) = g(x)

6. 函數的性質:

定理1:

$f: A \to B, A_1, A_2 \subseteq A$ 則

(1)若 $A_1 \subseteq A_2$, 則 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(4) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, 其中 f 為一對一函數

【證明】

(1) $\forall b \in f(A_1)$

$\Rightarrow \exists a \in A_1 \ni f(a) = b$

因為 $A_1 \subseteq A_2$

$\Rightarrow a \in A_2$

$\Rightarrow b = f(a) \in f(A_2)$

即 $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

(2) $b \in f(A_1 \cup A_2)$

$\Leftrightarrow \exists a \in A_1 \cup A_2 \ni f(a) = b$

$\Leftrightarrow (a \in A_1 \ni f(a) = b)$或$(a \in A_2 \ni f(a) = b)$

$\Leftrightarrow b \in f(A_1)$或 $b \in f(A_2)$

$\Leftrightarrow b \in f(A_1) \cup f(A_2)$

即 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(3) $\forall b \in f(A_1 \cap A_2)$

$\Rightarrow \exists a \in A_1 \cap A_2 \ni f(a) = b$

$\Rightarrow (a \in A_1 \ni f(a) = b)$且$(a \in A_2 \ni f(a) = b)$

$\Rightarrow b \in f(A_1)$且 $b \in f(A_2)$

$\Rightarrow b \in f(A_1) \cap f(A_2)$

即 $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

(4)根據(3)只需證 $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$

$\forall b \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$\Rightarrow b \in f(A_1)$且 $b \in f(A_2)$

$\Rightarrow (\exists a_1 \in A_1 \ni f(a_1) = b)$且$(\exists a_2 \in A_2 \ni f(a_2) = b)$

$\Rightarrow b = f(a_1) = f(a_2)$

因為 f 為一對一函數

$\Rightarrow a_1 = a_2$, i.e. $\exists a_1 \in A_1 \cap A_2 \ni f(a_1) = b$

$\Rightarrow b \in f(A_1 \cap A_2)$

即 $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$

定理2:

設 $f: A \to B, g: B \to C$ 為二個函數

(1)若 f, g 為一對一函數, 則 $g \circ f$ 亦為一對一函數

(2)若 f, g 為映成函數, 則 $g \circ f$ 亦為映成函數

【證明】

(1) $g\circ f(a_1)=g\circ f(a_2)$

$\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))$

因為 g 為一對一函數

$\Rightarrow f(a_1)=f(a_2)$

因為 f 為一對一函數

$\Rightarrow a_1=a_2$

所以 $g\circ f$ 為一對一函數

(2) $\forall z\in C$

因為 g 為映成函數

$\Rightarrow \exists y\in B \ni g(y)=z$

因為 f 為映成函數

$\Rightarrow \exists x\in A \ni f(x)=y$

即 $\exists x \ni (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$

所以 $g\circ f$ 為映成函數

定理3:

設 $f:A\to B$ 為一可逆函數, $B_1, B_2\subseteq B$

(1)若 $B_1\subseteq B_2$, 則 $f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$

(2) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

(3) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

(4) $f^{-1}(\overline{B_1})=\overline{f^{-1}(B_1)}$

7. 函數的計數問題:f:A→B,|A| = m、|B| = n,則

關係(函數)	個數	關係(函數)	個數
A至B的關係	2^{mn}	映至函數	n^m
1-1函數	P(n, m)	對射函數	n !
映成函數	$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C(n,i)(n-i)^m$		

例26:

設 A, B 為兩集合, $|A|=m, |B|=n$, 則

(1)由 A 至 B 的函數個數有 n^m 個

(2)由 A 至 B 的一對一函數個數有 P_m^n 個

【證明】

令 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

(1)由於函數的定義域中元素皆要有唯一對應(可以多對一)

a_1 可以對應至 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 中任一個有 n 種選擇

a_2 亦可對應至 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 中任一個有 n 種選擇

$\vdots$

a_m 亦可對應至 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 中任一個有 n 種選擇

利用乘法原理知這種對應法共有 $\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{ copies}} = n^m$ 種

表示函數的個數有 n^m 種

(2)一對一函數不允許有多對一的情形

a_1 可以對應至 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 中任一個有 n 種選擇

a_2 除了 a_1 對應的元素外皆可選擇，有 $n-1$ 種選擇

$\vdots$

a_m 除了 $a_1, \ldots, a_{m-1}$ 對應的元素外皆可選擇，有 $n-m+1$ 種選擇

利用乘法原理知這種對應法共有 $n(n-1)\ldots(n-m+1) = P^n_m$ 種選擇

表示一對一函數的個數有 P^n_m 種

例27：|A| = m、|B| = n， 求A至B映成函數的個數。

Sol:

A至B映成函數的個數

＝m異物置入n相異箱中且不允許空箱的方法數

＝ 所有函數的個數 －B中一元素不在值域 ＋B中二元素不在值域 －....

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k)(n-k)^m$$

8. 重排(Permutation)：

1. 定義：S_A={f | f：A→A且f是一個對射函數} ，A為有限集合。f為A的一個重排，而S_A為所有重排的集合。

2. |A| = n，則存在n!種A的重排。

3. 若重排中，f的函數序對中有(x_1, x_2)、(x_2, x_3)、...(x_k, x_1)，則稱f為長度k的循環，有cycle form 和 array form兩種表示法。

例28：A={1, 2, 3, 4}，f ={(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)}，則

array form = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，

cycle form = (1 2 3)

例29：A={1, 2, 3, 4, 5}，array form = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$，求cycle form? Sol：(1 4 5) = (4 5 1) = (5 1 4)
例30：A={1, 2, 3, 4, 5}，cycle form = (2 4 5 3) ，求array form? Sol：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
例31：A={1, 2, 3, 4, 5}，g, f $\in S_A$，f = (5 2 3), g = (3 4 1)，求g。f 之array form及cycle form。 Sol： g。f(1) = g(1) = 3; g。f(2) = g(3) = 4; g。f(3) = g(5) = 5 g。f(4) = g(4) = 1; g。f(5) = g(2) = 2 ∴ g。f = g(f(x)) = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$=(1 3 5 2 4)

4. 一有限集合的重排，其若不是單位函數或一循環，則可表為一些長度≥ 2的不相交循環的乘積。

例32：A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}，f = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ f 可寫成不相交循環的乘積，f = (1 3 6)。(2 4 5)。(7 8)

三、鴿舍定理(Pigeonhole principle, Dirichlet drawer principle)：

m隻鴿子住在n個鴿舍裡，若m > n，則必有一鴿舍住 ≥ 2隻鴿子；若m > nk，則必有一鴿舍住 ≥ k+1隻鴿子。

鴿舍原理以函數的概念來看則為：令A，B表有限集，若$|A|>|B|$，則對任一由A到B的映成函數上，必存在$a_1, a_2 \in A$且$a_1 \neq a_2$，使得$f(a_1) = f(a_2)$。這個原理簡單的應用很多，例如，13人中必有2人同月生，13人可看成13隻鴿子，12個月可看成是12個鴿舍。而37人中必有4人或更多的人同月生。又如，10雙鞋中任取11隻鞋，則這11隻鞋必有兩隻剛好配成一雙鞋。

例33：一九五九年當波沙十一歲時，著名的匈牙利數學家艾爾地希 (Paul Erdös) 經人介紹認識了他，便請他一同去吃午飯。當波沙正在喝湯時，艾爾地希就出了個題目想考考他的真本領有多大，他說：「波沙啊，你能不能證明假如有 n+1 個小於或等於 2n 的正整數，則它們中間必有一對數是互質的？」顯然易見這個問題對 n 個數便不對，因為 2,4,6,…,2n 這 n 個數絕沒有一對是互質的，而當初艾爾地希發現如此小小的定理時，還花了十分鐘去找一個真正簡單的證明。但是波沙繼續喝著他的湯，還沒過半分鐘便答道：「如果你有 n+1

個小於或等於 $2n$ 的正整數，總會有兩個是相鄰的，當然它們倆是互質的了。」

例34：張德培為參加比賽，故預備在賽前77天練習，每天至少練習一局，但總數不超過132局，證明必有一段連續的幾天恰練習21局。

[解] 令a_i表直到第i天練習的總數，則$a_1, a_2, \ldots, a_{77}$是個絕對遞增序列，而$a_1 \geq 1$，$a_{77} \leq 132$。考慮$a_1 + 21, a_2 + 21, \ldots, a_{77} + 21$，這亦是一遞增序列，而$a_{77} + 21 \leq 153$。

因$a_1, a_2, \ldots, a_{77}, a_1 + 21, a_2+21, \ldots, a_{77} + 21$這154個值的範圍是1到153，故必有兩個值相等，因前面77個值為絕對遞增，故都不相等，後面77個值亦絕對遞增故都不相等，因此存在a_i, a_j使得$a_i = a_j + 21$，亦即在第j+1、j+2、…、i天中共練習21局。

例35：證明$n^2 + 1$個相異整數的序列(sequence)中，有一個n +1長的遞增子序列(subsequence)，或者有一個n + 1長的遞減子序列。

【解】 先說明何謂序列及子序列，令$x_1, \cdots, x_p$表一序列，則子序列爲任一序列$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_q}$，而$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq p$。例如，序列爲9，10，13，7，16，則10，7，16 爲一子序列，9，13，7，16 亦爲子序列。

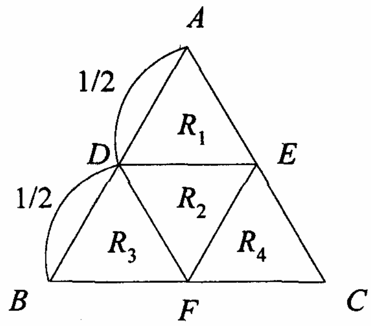
令$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$表$n^2+1$個相異整數的序列，對每一$a_k$，令$x_k$表自$a_k$開始最長遞增子序列的長度，令$y_k$表自$a_k$開始，最長遞減子序列的長度。若在$a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$中，不存在長爲$n+1$的遞增或遞減子序列，則$\forall_k$，$1 \leq x_k, y_k \leq n$。因對每一$a_k$而言，可對應一有序對$(x_k, y_k)$，故$(x_k, y_k)$至多有$n^2$個不同的值，但因有$n^2+1$個$a_k$，亦即有$n^2+1$個$(x_k, y_k)$，故必存在$a_i, a_j$，而$i < j$，使得$x_i = x_j$，$y_i = y_j$，但這是不可能的，因若$a_i < a_j$，則$x_i > x_j$；若$a_i > a_j$，則$y_i > y_j$，故假設不成立，亦即存在一個長爲$n+1$的遞增或遞減子序列。

	9	10	13	7	16
x_k	4	3	2	2	1
y_k	2	2	2	1	1

例36：△ABC為等邊三角形，邊長為 1，在這三角形內部取五點，則必有二點的距離小於 1/2 。

[解]：

如下圖將ΔABC分成四個區域 R_1, R_2, R_3, R_4，每個都是長度 1/2 的等邊三角形



在裡面取五個點，由鴿籠原理知至少二個點落在同一區域，則這二點的的距離小於 1/2，得證

例37：一群人，人數大於等於 6，必然有三知友兩兩彼此認識或有三新鮮人兩兩彼此都不認識。

證明：

任取一人名之為 A，其他人，人數至少為 5，可分為二類。與 A 認識者為一類，與 A 不認識者為另一類，由鴿籠原理，必有一類人數大於等於 3。令此三人之名為 B、C、D。 若 B、C、D 皆與 A 認識且其中有二人彼此相識，則 A 及此二人為三知友，不然 B、C、D，兩兩不認識則 B、C、D 為三新鮮人；若 B、C、D 皆與 A 不認識且其中有二人彼比不相識，則 A 與此二人為三新鮮人，不然 B、C、D 中兩兩互相認識則 B、C、D 為三知友。無論有三知友或三新鮮人，結論都是對的。