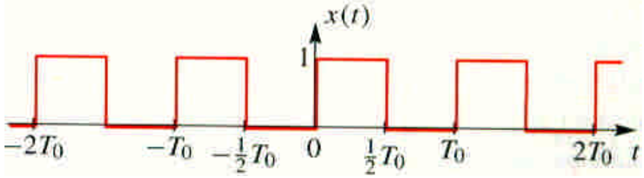
F.S. , F.T. and L　　南台電機 趙春棠

F. S.



✧ **x(t):** （T=1 s）

✧ 公式：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t};\qquad w_0=\frac{2\pi}{T}$$ （w_0= 2*pi）

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jkw_0}dt;\qquad \text{其中 } a_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \quad \text{爲DC Part, or 平均值}$$

✧ **ak:**

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{1}{2}T_0} 1\cdot e^{-jkw_0}dt=\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jkw_0}e^{-jkw_0}\Big|_{t=0}^{t=\frac{T_0}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jkw_0}e^{-jkw_0\frac{T_0}{2}}+\frac{1}{jkw_0}\right)=\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jkw_0}e^{-jk\pi}+\frac{1}{jkw_0}\right)$$

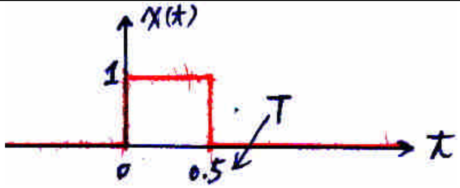
$$=\frac{1}{-jk2\pi}e^{-jk\pi}+\frac{1}{jk2\pi}=\frac{e^{-jk\pi}-1}{-jk2\pi}=\frac{1-(-1)^k}{j2\pi k};\qquad 【\, e^{-j\pi}=-1 \,】$$

上式無法得 a_0(a=0 代入，使分母爲 0), 另外計算：

$$a_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{1}{2}T_0} 1\cdot e^{-j0t}dt=\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{2}T_0\right)=\frac{1}{2}$$

綜合得：

F.T.



✧ **x(t):**

✧ 公式：

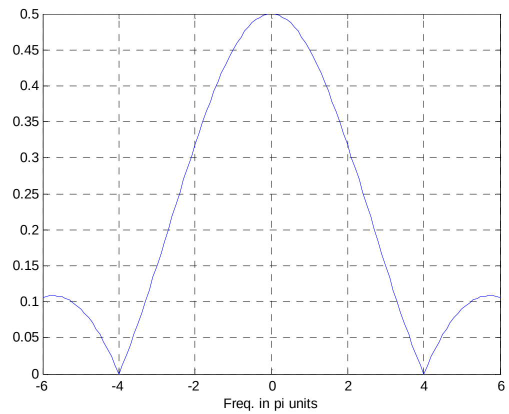
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

✧ **X(w)**

$$X(\omega)=\int_0^{0.5} 1\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-jw}e^{-jwt}\Big|_{t=0}^{t=0.5}=\frac{-1}{jw}e^{-j0.5w}+\frac{1}{jw}$$

$$=\frac{1-e^{-j0.5w}}{jw}$$

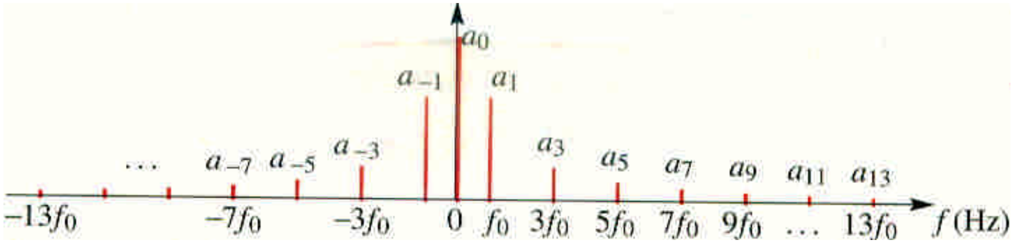


$$a_k=\begin{cases}\dfrac{1}{j\pi k} & k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots\\ 0 & k=\pm2,\pm4,\pm6,\cdots\\ \dfrac{1}{2} & k=0\end{cases}$$

故 $[\,|a_{-3}|,|a_{-2}|,|a_{-1}|,|a_0|,|a_1|,|a_2|,|a_3|\,]=[\dfrac{1}{3\pi}$ 、0、$\dfrac{1}{\pi}$ 、$\boxed{\dfrac{1}{2}}$ 、$\dfrac{1}{\pi}$ 、0、$\dfrac{1}{3\pi}$]

= [0.1061、0、0.3183、$\boxed{0.5}$、0.3183、0、0.1061]

以上係數對應的頻率 w =[-6π 、-4π 、-2π 、$\boxed{0}$、2π 、4π 、6π]



（**f_0=1Hz,** 上圖其實是係數取絕對值）

上圖之 Matlab 程式：

```
w=-6*pi:pi/10:6*pi;
X=[1-exp(-j*0.5*w)]./(j*w);
X_g=abs(X);   plot(w/pi,X_g);   grid;
xlabel('Freq. in pi units')
```

Note: 本例比較特別，否則可利用 H = **freqs**(B,A,W) 指令繪頻譜圖。

✧ 與 F.S. 比較：

計算 w =[-6π 、-4π 、-2π 、$\boxed{0}$、2π 、4π 、6π] 的 X(w) 大小

得 [0.1061、0、0.3183、$\boxed{0.5}$、0.3183、0、0.1061] 【同左】

Matlab 程式：

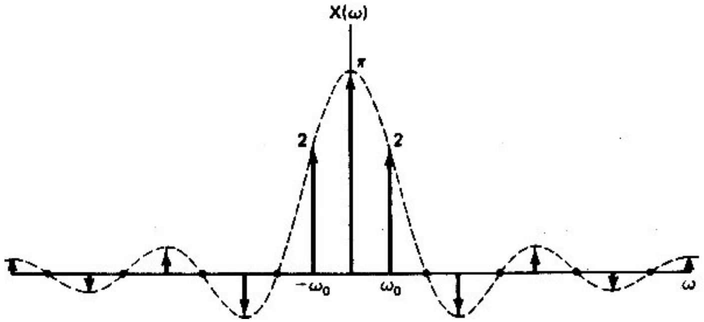
```
w=[-6*pi -4*pi -2*pi 0 2*pi 4*pi 6*pi];
X=[1-exp(-j*0.5*w)]./(j*w);
X_g=abs(X)
```

Note: X_g = 0.1061 0.0000 0.3183 NaN 0.3183 0.0000 0.1061

（此項須另外計算）

✧ x(t) 的 F.T.

$$\boxed{X(w)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\, a_k\delta(w-kw_0)}$$



【Note: 頻譜出現 pulse 喔！】

Laplace Transform

✧ **X(s)：** $X(s)=\dfrac{1}{s}-e^{-0.5s}\dfrac{1}{s}=\dfrac{1-e^{-0.5s}}{s}$

【Note: 本例滿足 $X(jw)=X(s)|_{s=jw}$ 】

✧ 結論：

由以上 F.S. 與 F.T. 的比較，可發現 F.S.的係數大小，好比是在 F.T. 的「頻率」軸上「取樣」的結果。試想，當週期訊號 x(t) 的週期 $T_0\to\infty$ ，則 $w_0\to 0$ ，此時 F.S. 不就等於 F.T. 了嗎？（在 Oppenheim 書中，就是在這種條件下，將 F.S. 推導爲 F.T. 的）