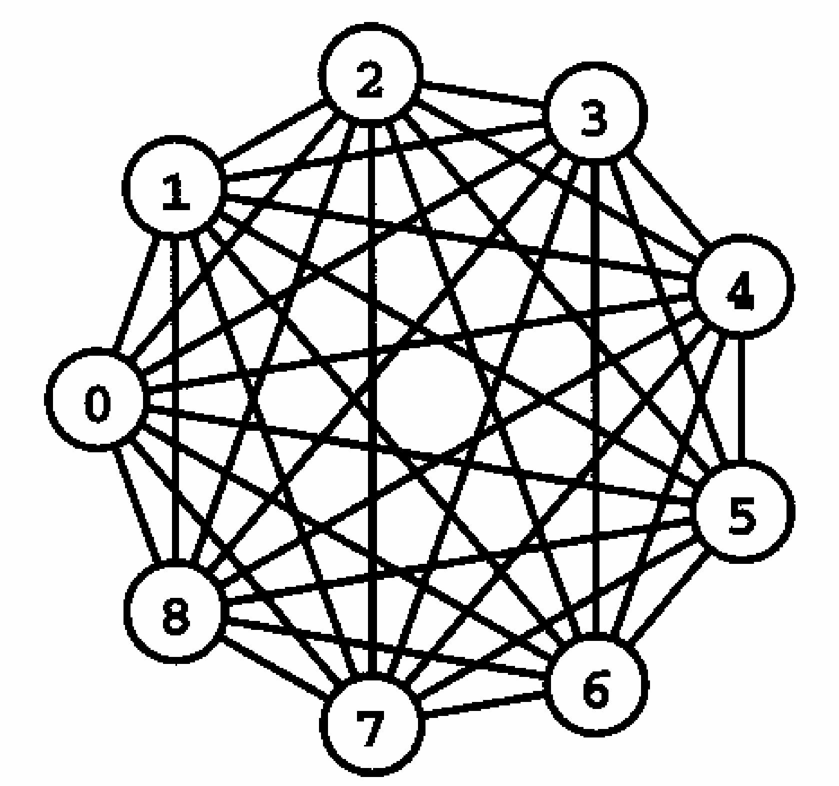
排列、組合



黎 靖 編著

南台科大電子系

排列(permutation) 是集合中一群個體的有序選擇；組合(combination)是集合中一群個體的無序選擇。在排列與組合中個體的選擇可允許重覆或不允許重覆。例加，a、b、c三個字母中選出兩字母，有9種字母可重複的排列：

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc

有6種字母不可重覆的排列：

ab, ac, ba, bc, ca, cb

有6種字母可重覆的組合：

aa, bb, cc, ab, ac, bc

有3種字母不可重覆的組合：

ab, ac, bc

n個不同個體中選取r個元素不重覆的排列·簡稱r-排列，共有P(n, r)種，而

$$P(n, r) = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

因第一個位置的選擇有n種，第二個位置的選擇有n-1種, …，第r個位置的選擇有n-r+1種，根據乘法原理可得上式。

又P(n, n) = n · (n-1)…3 · 2 · 1，以n!表n · (n-1)…3 · 2 · 1，定義0!=1，n!讀做n階乘(n factorial)，故

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{，} P(n, n) = n!$$

n個不同個體中選取r個且不可重覆的組合，簡稱r-組合共有C(n, r)種，而

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

因n個不同個體中選取r個且不可重覆的排列有P(n, r)種，我們可先選r個不可重覆的組合，有C(n, r) 種，再將它們做排列，有r! 種，故

$$P(n, r) = C(n, r)\, P(r, r)$$

一、加法律與乘法律：

(1) 加法律：$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C)$, 當A, B, C 互斥。

(2) 乘法律：$\#(A \times B \times C) = \#(A) \times \#(B) \times \#(C)$

例1： 從5本BASIC，4本FORTRAN，7本Pascal中選一本書的方法數有多少種? [解] 由於只選一本書，所以選到一種書後便不會選到另一種書 即不會同時發

生，利用加法原理知有　　　　　　種。
例2： 從5本BASIC，4本FORTRAN，7本Pascal中選二本不同語言的書方法數有多少種? [解] (1) 若選到的二本，一本是BASIC，一本是FORTRAN，利用乘法原理知選法有　　　種 (2) 若選到的二本，一本是BASIC，一本是Pascal的選法有　　　種 (3) 若選到的二本，一本是FORTRAN，一本是Pascal的選法有　　　種 這三個事件不會同時發生，利用加法原理總共的選法有　　　　　　種。

二、排列：

方式	說明	公式
排列	在不可重複選取的情況下，從n相異物中取r件做排列的方法數	$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$
全相異物直線排列	n相異物在n不同位置的直線排列數	n!
不全相異物直線排列	共有k種之n件不全相異物，第i種有q_i個，在n不同位置的直線排列數	$\frac{n!}{q_1!\,q_2!\ldots q_k!}$
重覆排列	在可重複選取的情況下，從n相異物中取r件做排列的方法數	n^r
環狀排列	n相異物在n不同位置的環狀排列數	(n-1)!
珠串排列	環狀排列+可翻轉	(n-1)!/2

2.1 全相異物直線排列

例3： 試求4位數中，每位數字都相異的有多少?

[解]

這問題等於將10個數字0, 1, 2, ..., 9中的4個加以排列，排列數共有P(10, 4) = 5040。

在這5040個4位數中，有一些第一位數字是0的，不能算在我們的答案內，這種情況有

$$9 \times 8 \times 7 = 504。$$

因此，我們的答案應該是5040 – 504 = 4536。

[另解]

第一位數字不能是0，故有9種選法，第二位數字可從第一位數字以外的9個中任選一個，方法有9個，第三位數字有8種，第四位數字有7種選法，因此每一位數字都相異的4位數共有　　　　　　　　　　　　個。

例4：　4個相異的英文字母後面再排3個相異的數字，排法共有多少種?

[解]　$P(26, 4)\times P(10, 3) = 258{,}336{,}000$

2.2　不全相異物直線排列

例5：　排列字母TALLAHASSEE的排列數有多少種?

Sol: $\dfrac{11!}{3!\,2!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 831600$

例6：證明$(k!)^{(k-1)}$整除$(k!)!$，其中$k\in N$。

[證明]

設有$k!$件物品，其中共有$(k-1)$種，每種各有k件，則這$k!$件物品的排列數為

$$\frac{(k!)!}{k!\,k!\cdots k!} = \frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)}}\text{ 種}$$

由於總排列數必為整數，所以$(k!)^{(k-1)}$必整除$(k!)!$

2.3　重覆排列

例7：在5天中，排3門課的考試時間，如果每天所考的科目不限制多少科，那麼考試時間表的排法共有$5^3 = 125$。

例8：　設A為一有限集，基數為r，求A的子集的個數?

[解]

考慮將A中的r個元素放在兩個箱子中，箱子編號為1, 2。對應於每一種放置法，就可以定義A的一個子集，即放在箱子1中的元素屬於這子集，放在箱子2中的元素不屬於這子集。因為這種對應是1對1的對應，且放置r個元素於兩個箱子的方法共有2^r種，因此A的子集共有2^r個。

例9：　二元r-序列是指由2個數字所構成的r個項的數列。二元r-序列共有2^r種。在這2^r種二元r-序列中，有多少種序列，其中含有偶數個0？(所給的2個數字是0和1)

[解]

將這些二元r-序列配對，使每一對的兩個序列只是第r個數字相異，其餘都相同。

則每一對序列中，必有一個序列，所含的0的個數為偶數個。因此共有2^{r-1}個二元r-序列，含有偶數值0。

例10：考慮五元r-序列，(所給的5個數字是0，1，2，3，4)，其中包含偶數個0的有多少?

[解]

五元r-序列的個數共有5^r個。其中有3^r個這種序列，只包含數字2，3和4。這3^r個當然都含有偶數個0。其餘的5^r-3^r個序列，再依照序列中所含的2，3和4的情形分類，2、3和4出現的位置都一樣的形成一類，例如所有形如23xx344xx2xxx的序列都屬於同一類，其中的每一x都可以是0或1。則每一類中，有一半的序列，所含0的個數為偶數。故5^r個五元r-序列中，含有偶數個0的序列有$3^r+\frac{1}{2}\times\left(5^r-3^r\right)=\frac{1}{2}\times\left(5^r+3^r\right)$。

2.4 環狀排列

例11：主人夫婦與賓客四對夫婦共10人圍一圓桌，依下述條件，分別求其坐法：

(1) 任意圍坐　　(2) 男女相間而坐

(3) 每對夫婦均相鄰而坐　　(4) 男女相間且夫婦相鄰

(5) 主人夫婦相對而坐　　(6) 每對夫婦相對而坐

[解]

(1) 10人圍圓桌而坐，坐法有9!(種)

(2) 男女相間而坐，5位男士先坐，坐法有4!；對其中每一種坐法，5位太太再坐於五個間隔，坐法有5!，故共有坐法4!×5!=2880(種)

(3) 5位男士先坐，坐法有4!，然後每一位太太可坐於先生的左鄰或右鄰故共有坐法$4!\times2^5=768$(種)

(4) 5位男士先坐，坐法有4!，對其中每一種坐法5位太太的坐法只有2種(太太們要同時坐先生的右鄰或左鄰)，故共有坐法4!×2=480(種)

(5)主人夫婦先坐有1(種)，其他8人再人坐有8!(相當於人坐到有編號之8個坐位)，故共有8!種。

(6)主人夫婦先坐有1(種)，再讓4對夫妻人坐有4!，而此4對夫婦可對調有2^4(種)，故

共有$4!\times 2^4$(種)。

2.5　珠串排列

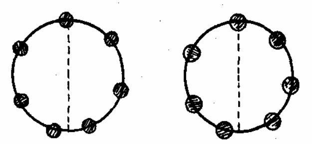
例12：珠串排列

(1) 紅、黃、綠、藍、黑、紫、白等7顆不同寶石串成一項圈有幾種串法?

(2) 承上題其中紅、黃、藍三顆寶石必相鄰之串法有幾種?

[解]

(1) $\begin{cases} \text{7 顆寶石之環狀排列有} \dfrac{7!}{7}=6! \text{ 種} \\ \text{如下圖每 2 種環狀排列，表同一項圈} \end{cases}$



∴　共有$\dfrac{6!}{2}=360$ 種串法

將左邊之項圈沿虛線上下翻轉，可得右邊之結果，故雖然是2種不同之環狀排列，其實表示同一項圈。

(2) □□□、綠、黑、紫、白之環狀排列有 4! 種方法

將“紅、黃、藍”插入 3 空格有 3! 種方法

每 2 種環狀排列表同一項圈

∴　共有串法 $4!\times 3!\times \dfrac{1}{2}=72$ (種)

例13：一顆紅寶石、二顆藍寶石、四顆黃寶石串成一項圈，其串法有幾種?

[解]

(1) 對稱型：將藍、黃、黃填入3空格有$\dfrac{3!}{2!}=3$種

(2) 不對稱型：$\left[\dfrac{(7-1)!}{2!\,4!}-3\right]\times\dfrac{1}{2}=6$種

∴串法有3+6 = 9種

三、組合：

<table>
<tr><th>方式</th><th>說明</th><th>公式</th></tr>
<tr><td>一般組合</td><td>1. 在不可重複選取的情況下，從 n 相異物中取 r 件做組合的方法數。
2. n 個元素的集合 A 的子集合當中，有幾個內含 r 個元素?
3. $(1+x)^n$ 展開後，x^r 項係數是多少?
(稱為 binomial coefficient)
4. Pascal 三角形的第 n 列第 r個值是多少?
5. 把 n 個紅色的球，與 m-n 個藍色的球排入 1 到 m 號共 m 個位置，有多少種不同的排法?</td><td>$C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$
$C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$</td></tr>
<tr><td>二項式定理</td><td colspan="2">$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C(n,k)x^k y^{n-k}$
$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n-1)+C(n,n)=2^n$</td></tr>
<tr><td>多項式定理</td><td colspan="2">$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}x_1^{n1}x_2^{n2}\ldots x_t^{nt}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">重覆組合</td><td>1. n件相同物分到r個相異盒子</td><td>$H(r,n)=C(n+r-1,n)$</td></tr>
<tr><td>2. 由r類相異物，可重覆選取n件</td><td>$H(r,n)=C(n+r-1,n)$</td></tr>
<tr><td>3. $x_1+x_2+\ldots+x_r=n$，非負整數解總數</td><td>$H(r,n)=C(n+r-1,n)$</td></tr>
<tr><td>4. $x_1+x_2+\ldots+x_r=n$，正整數解總數</td><td>$H(r,n-r)=C(n-1,r-1)$</td></tr>
</table>

3.1 一般組合

例14：五件不同的工作，指派給四位員工，每人都要有工作，問有多少種指派的方式?

[解]

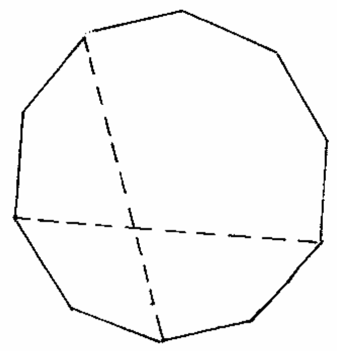
首先將5件工作分成2、1、1、1，四個人A、B、C、D。中，有一個人做2件，而其他三人各做1件。總方法數 =

例15： 設一個凸10邊形中，任意三條對角線都不共點，試問所有的對角線互相之間，共分成多少個線段?

[解]

首先，對角線的個數共有

其中C(10,2)指從10個頂點中，任取2點，即可連成一線段，這些線段中去掉10個邊，即為對角線的個數。



因為，從10個頂點中，任取4個，都可產生一個對角線的交點，如圖所示，因此，所有對角線的交點數共有 。

因為每一對角線上，如果有k個交點在其上，就會被分成k+1個線段，在210個交點中，每一個交點都恰在兩條對角線上，因此，對角線間互相分成的線段共有 。

例16：證明 $\left(C_0^n\right)^2+\left(C_1^n\right)^2+\left(C_2^n\right)^2+\ldots+\left(C_r^n\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_n^{2n}$

[證]

由$2n$件相異物品中選取n件，可先將此$2n$件相異物品分成各含n件物品的兩堆，選取n件的方法可以由甲堆中選取r件，再由乙堆中選取n-r件，其選法有

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^n C_{n-i}^n=\sum_{i=0}^{n}\left(C_i^n\right)^2=C_n^{2n}$$

17： 由1, 2, …, 300中選3個相異數字，使其和為3的倍數的選法有多少種?

[解]　將1，2，・・・，300分成三個集合

$A_1=\{3k \mid 1 \le k \le 100\}$表3的倍數的集合、

$A_2=\{3k+1 \mid 0 \le k \le 99\}$表除以3餘數為1的集合

$A_3=\{3k+2 \mid 0 \le k \le 99\}$表除以3餘數為2的集合

取3個數和為3的倍數的可能選法有下列4種情形：

(1) 3個數都由A_1選出有　　　種

(2) 3個數都由A_2選出有　　　種

(3) 3個數都由A_3選出有　　　種

(4) 3個數由A_1, A_2 , A_3中各選一個有　　　　　　種

利用加法原理知共有

例18：證明 $C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$

[證明] 若固定其中某一物品X可分成二種來討論

(1) 沒取到X時，相當於在其他n-1個物品取r個有　　　種

(2) 取到時，相當於在其他n-1個物品取r-1個有　　　種

故由加法定理知 $C(n, r) = C(n-1, r-1) + C(n-1, r)$

3.2 二項式與多項式定理

例19：

(1) 求$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \ldots + C(n, n) = ?$

(2) 求$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \ldots + (-1)^n C(n, n) = ?$

【解】

(1)利用二項式定理 $x=y=1$ 代入，得

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

(2)利用二項式定理 $x=-1, y=1$ 代入，得

$$0=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

例20：展開$(x+y+z)^7$後

(1) $x^2y^2z^3$的係數= $\frac{7!}{2!\,2!\,3!}=210$。 (2) xyz^5的係數= $\frac{7!}{1!\,1!\,5!}=42$ (3) x^3z^4的係數= $\frac{7!}{3!\,4!}=35$

3.3 重覆組合

例21：以下的問題答案皆為H(n, r)

(1) r個相同球放入n個相異箱子，允許有空箱的方法數

(2) $x_1 + x_2 +\ldots+ x_n = r$之非負整數解個數

(3) r個0，n-1個1的二元序列個數

[證明]

(1) n個箱子可以用n-1個欄杆圍起來，例如：000|00|0||000表示9個球5個箱子，第1到第5個箱子的球數分別為3、2、1、0、3，所以相當於r個0，n-1個|的不全相異排列，方法數有

$$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}=C(n+r-1, r) = H(n, r)$$

(2) 相對於(1)可視x_i表示第i個箱子的球數，i =1, 2, …, n。

因為允許有空箱，所以$x_i \geq 0$；總共有r個球，所以$x_i + x_2 +\ldots + x_n = r$

所以與(1)的問題是等價的，其方法數亦為C(n+r-1, r) = H(n, r)

(3)將(1)中的|視為1，則與(1)的問題亦是等價的，其方法數亦為

$$C(n+r-1, r) = H(n, r)$$

例22：

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$中，

有幾組非負整數解?

有幾組正整數解?

有幾組整數解?其中$x_1 \geq 2$，$x_2 \geq 2$，$x_3 \geq 4$，$x_4 \geq 0$

解：

(1) H(4, 12) = C(15, 12)

(2) 因需正整數解，令$x_i-1=y_i$，$i=1,2,3,4$代入，可得$y_1+y_2+y_3+y_4=8$，考慮其中非負整數解y_i，即得$x_i \geq 1$的正整數解，故有$C^R(4,8)=C(4+8-1,8)=C(11,8)$種。

(3) 令$x_1-2=y_1$，$x_2-2=y_2$，$x_3-4=y_3$，$x_4=y_4$代入可得$y_1+y_2+y_3+y_4=4$，考慮其中的非負整數解y_i，即得$x_1 \geq 2$，$x_2 \geq 2$，$x_3 \geq 2$，$x_4 \geq 0$的解，故有$C^R(4,4)=C(4+4-1,4)=C(7,4)=35$種方法。

例23： 試問r個相同球放入n個相異箱子不允許有空箱的方法數?

【解】

相當於 $x_1+x_2+\ldots+x_n=r, x_i\geq 1, i=1,2,\ldots,n$ 之整數解個數

令 $y_i=x_i-1, i=1,2,\ldots,n$

$\Rightarrow y_1+y_2+\ldots+y_n=(x_1-1)+(x_2-1)+\ldots+(x_n-1)=r-n, y_i\geq 0, i=1,\ldots,$
n

相當於 $y_1+y_2+\ldots+y_n=r-n$ 之非負整數解個數有

$$\binom{n+(r-n)-1}{r-n}=\binom{r-1}{r-n}=\binom{r-1}{n-1}$$

例24：有7個朋友到速食店點餐，速食店提供4種餐點A,B,C,D，問共有幾種點餐方式?

解：

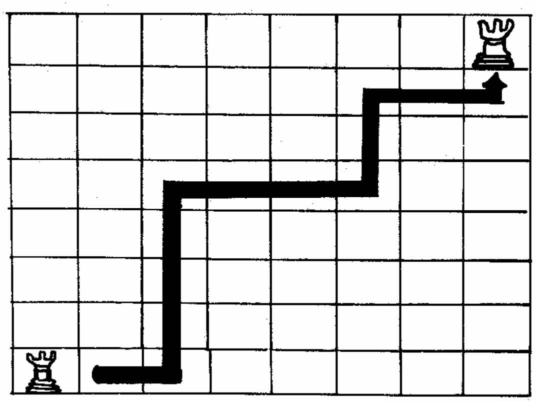
相當於4件相異物允許重複取7件組合(n=4，r=7)。若點的情形為2個A、3個B、1個C、1個D，則AABBBCD可標記為xx|xxx|x|x。同理，若點的情形為AAAACCC可標記為xxxx||xxx|

每一種點法皆可對應至一種標記法，反之一種標記法也會對應一種點法，所以只要算標記的方法有幾種即可。標記包含7個x、3個|的不全相異排列，其方法數有

$$\frac{(7+3)!}{7!3!}=C_7^{10}=C_7^{4+7-1}=C_r^{n+r-1}$$

例25：

普通的8×8西洋棋盤上，一個城堡棋子從最南端的角落方格，走到最北端的角落方格，每步只能向東或向北前進，試問這城堡棋子所能走的不同路徑有多少種?(如下圖所示，即為其中的一路徑)。



解：

如果以0代表往東走一步，以1代表往北走一步，則從最南端的角落走到最北端的角落方格的路徑都是7個1和7個0所組成的二元14-序列，亦即7個0和7個1的排列，故路徑數有。$\frac{14!}{7!\,7!}=3432$

例26：

接上題，這些路徑中含有4次向東前進，3次向北前進的路徑有多少?(一次向東前進是指連續若干步的向東走，一次向北前進的定義相同。)

解：

路徑中含有4次向東前進的數目等於將7個相同的球放進4個相異的箱子中，每一箱至少裝一個球的放法數，首先每一箱都先放一個球，然後再來分配剩下的3個球，因為將3個相同的球，放進4個相異的箱子，每箱裝的球數不限，放法共有

因此，將7個相同的球，放進4個相異的箱子，每箱至少裝1個的放法共有20種。同樣的方法，可以求得路徑中，含有3次向北前進的數目等於 。

因此，利用乘法律，路徑中含有4次向東前進及3次向北前進的，共有

例27：

將2t+1個相同的球放進3個相異的箱子中，使任意兩個箱子所裝的球數比另一個箱子多，試求放法有多少?

解：

如果不管問題中的限制條件，那麼放法就有 。

第一個箱子中所裝的球數，比第二個箱子和第三個箱子所裝球數的和多的放法，可將t+1個球先放在第一個箱子，剩下的t個球再任意放在全部的3個箱子，因此放置的方法共有 。

第二個箱子中所裝的球數多於第一，第三兩箱所裝的球數和放法亦有H(3, t)，第三個箱子中所裝的球數多於第一，第二兩箱所裝的球數和的放法也有H(3, t)，因此，原問題的答案為

$$H(3, 2t+1) - 3H(3,t) = C(2t+3,2t+1)-3C(t+2,t)$$

$$=C(2t+3,2)-3C(t+2,2) = \frac{1}{2}(2t+3)(2t+2)-\frac{3}{2}(t+2)(t+1)=\frac{t(t+1)}{2}$$

例28：投擲三粒骰子的方法數，與從6個數字1, 2, 3, 4, 5, 6中重複選取3個數字等價，因此投三粒骰子的方法數，共有

例29：

for i=1 to n do

```
        for j=1 to i do
            for k=1 to j do
                write(i+j-k)
            end
        end
    end
```

問write執行多少次？

Sol: 由題意知 $1 \le k \le j \le i \le n$

∴ 可在1至n中選3段放置i, j, k，如下圖

每一種放置方式對應write執行1次

本問題相當於：由n相異物中重複選取3數字

∴ 解答為 $H_3^n = C_3^{n+2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$