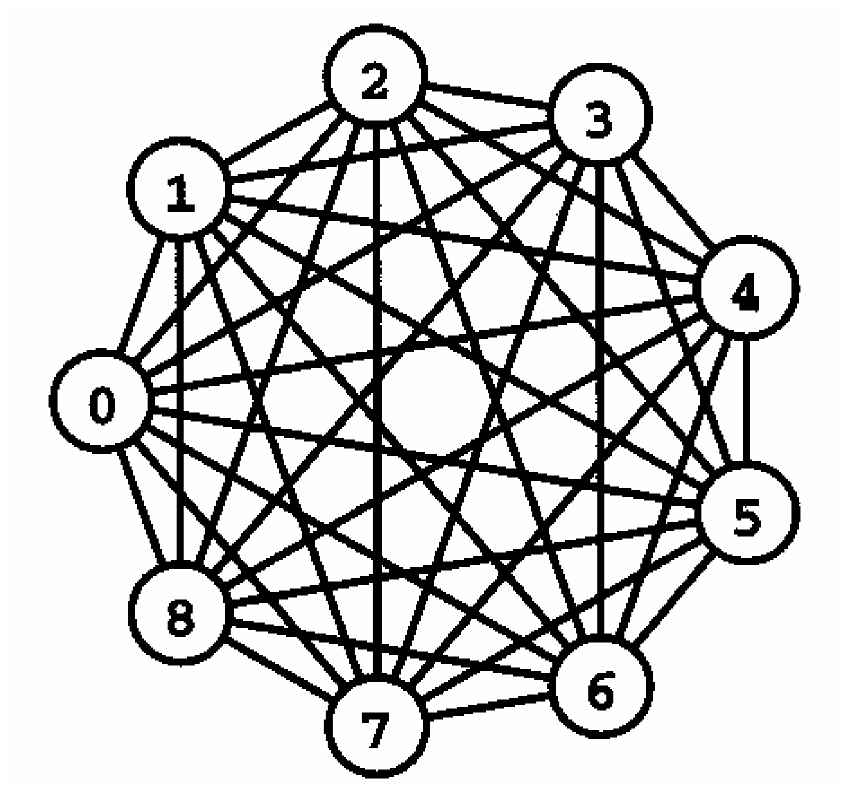
# 集合及命題




黎 靖 編著

南台科大電子系

## 一、集合(Set)：

(1) 性質：元素(element)需相異；元素可為集合；元素間無次序性。

(2) 符號：$\forall$(全體)、$\exists$(存在)、$\exists!$(恰有一個)、$\in$、$\notin$、$\subset$、$\subseteq$、$=$、$\neq$、$\not\subset$、$\cap$、$\cup$、$-$、$\overline{A}$、$\oplus$、$2^A$、$\varnothing$、#(A)或|A|，一般集合運算沒有'+'。

(3) 表示法：

1. 列舉法：適用於元素個數可數的集合, 例如 A = {1, 3, 5, 7, 9}。
2. 描述法：不論元素個數多寡均適用, 但必須有規律, 例如A = {x | x是小於10的正奇數}。"描述法" 當中，一豎 之前， 通常會出現一些變數，有一部分變數同時也出現在冒號 (或一豎) 之後， 可以把這些變數想像成是 for 迴圈的 dummy variables， 每一組符合後面條件的 dummy variables 代入前面這個式子， 就產生集合當中的一個元素；至於另一部分變數， 也就是並未出現在冒號後面的變數，可以把它們想成是全域變數，它們的值是固定的，例如 { np | n = 1, 2, 3, ... } = { p, 2p, 3p, ... } 如果 p 的值是 5 那麼這個集合就是 { 5, 10, 15, 20, ... }。

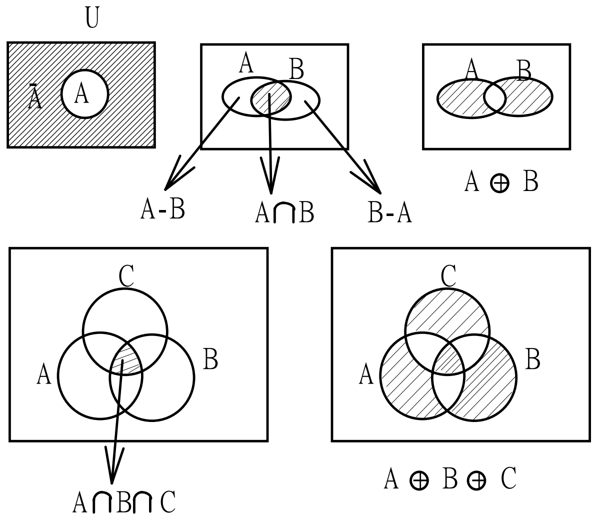
例: 試列舉出 A = { q/p-p/q | p^2+q^2 <= 5, p, q are in N } 的所有元素。

(4) 集合之運算：

U是宇集={a, b, c, d, e, f, g}, A={a, b, c}, B={b, c, d, e, f}

| 運算 | 名稱 | 定義 | 結果 |
|---|---|---|---|
| $A\cap B$ | Intersection | | |
| $A\cup B$ | Union | | |
| A-B | Complement of B with respect to A | $\overline{B}$ | |
| $\overline{A}$ | The complement of A | | |
| $A\oplus B$<br>$A\Delta B$ | Symmetric difference | | |
| P(A)或$2^A$ | Power set | | |
| $A\subseteq B$ | A is a subset of B | | |
| A = B | Equivalence | | |
| #(A)或\|A\| | Cardinality | The number of element in A | \|A\| = 3, \|B\| = 5 |

(5) 文氏圖 (Venn diagram)：




(6) 空集：

1. 不擁有任何元素的集合，稱為空集，並記作∅。
2. ∅是任意集合的子集。
3. ∅是唯一的。
4. $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$、$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

**例1**： Which one of the following is FALSE? (a) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ (b) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ (c) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$ (d) $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$ (e) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$ A:

**例2**： U is the universal set of A and B. Show that $A \oplus B = B \oplus A$.

Proof:

**例3**： Let A, B, and C be three arbitrary sets, show that $(A-B)-C = A-(B \cup C)$.

Proof:

另證：

(6) 恆等律：等效律、結合律、交換律、分配律

1. 等效律(Idempotent Laws)：$A \cap A=A$、$A \cup A=A$
2. 結合律(Associative Laws)：∩、∪、⊕有結合性；-沒有結合性。

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$； $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$； $(A-B)-C \neq A-(B-C)$

$(A-B)-C = (A-C)-B = (A-C)-(B-C) = A-(B \cup C)$

3. 交換律(commutative laws)：$\cap$、$\cup$、$\oplus$有交換律

4. 分配律(Distributive Laws)：

$\cap$對$\cap$、$\cup$、$\oplus$、－有分配律，$\cup$只對$\cap$、$\cup$有分配律

$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$； $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$； $A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$

$A\cup(B\oplus C) \neq (A\cup B)\oplus(A\cup C)$ ；

$(A-B)-C = (A-C)-(B-C)$； $A-(B-C) \neq (A-B)-(A-C)$

**例4**： Prove (1) $A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$； (2) $A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$

Pf:

(7) De Morgan's Law：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 。

注意：$\overline{A\oplus B} = \overline{A}\oplus B = A\oplus\overline{B}$

**例5**： prove $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$

Pf：

**例6**：Simplify the expression $\overline{\overline{(A\cup B)\cap C}\cup\overline{B}}$

Sol:

$\overline{\overline{(A\cup B)\cap C}\cup\overline{B}}$

$=\overline{\overline{(A\cup B)\cap C}}\cap\overline{\overline{B}}$ DeMorgan's Law

$=((A\cup B)\cap C)\cap B$ Law of Double Complement

$=(A\cup B)\cap(C\cap B)$ Associative Law of Intersection

$=(A\cup B)\cap(B\cap C)$ Commutative Law of Intersection

$=[(A\cup B)\cap B]\cap C$ Associative Law of Intersection

$=B\cap C$ Absorption Law

**例7**：Prove $\overline{A\Delta B}=A\Delta\overline{B}$

Pf:

$\overline{A\Delta B}=\overline{(A\cup B)-(A\cap B)}=\overline{(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}}$ Definition

$=\overline{(A\cup B)}\cup\overline{\overline{(A\cap B)}}$ DeMorgan's Law

$=\overline{(A\cup B)}\cup(A\cap B)$ Law of Double Complement

$=(A\cap B)\cup\overline{(A\cup B)}$ Commutative Law of ∪

$=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ DeMorgan's Law

$=[(A\cap B)\cup\overline{A}]\cap[(A\cap B)\cup\overline{B}]$ Distributive Law of ∪ over ∩

$=[(A\cup\overline{A})\cap(B\cup\overline{A})]\cap[(A\cup\overline{B})\cap(B\cup\overline{B})]$ Distributive Law of ∪ over ∩

$=[U\cap(B\cup\overline{A})]\cap[(A\cup\overline{B})\cap U]$ Inverse Law

$=(B\cup\overline{A})\cap(A\cup\overline{B})$ Identity Law

$=(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$ Commutative Law of ∪

$=(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{\overline{A}\cap B})$ DeMorgan's Law

$=\overline{A}\Delta B$

$=(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$ Commutative Law of ∪

$=(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A\cap\overline{B}})$ DeMorgan's Law

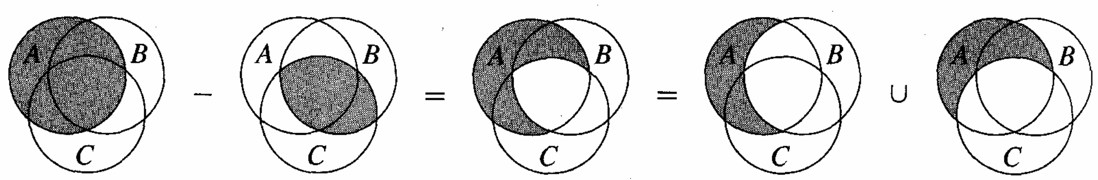
$=A\Delta\overline{B}$

(8) 其他： A-(B⋂C) = (A-B)⋃(A-C)； A-(B⋃C) = (A-B)⋂(A-C)

**例8**： Prove A-(B⋂C) = (A-B)⋃(A-C)

Pf: A-(B⋂C) = A∩($\overline{B\cap C}$) = A⋂($\overline{B}$ ⋃ $\overline{C}$)=( A⋂ $\overline{B}$)⋃(A⋂ $\overline{C}$)

= (A-B)⋃(A-C)




$A \quad - \quad (B\cap C) \quad = \quad A-(B\cap C) \quad = \quad (A-B) \quad \cup \quad (A-C)$

## 二、命題(Proposition)

| | |
|---|---|
| Proposition | 一種敘述句型，可能為真亦可能為假，用p, q表示 |
| Tautology | 恆真之Proposition，如 $p \vee \overline{p}$ 、18可被3整除、 $\forall x \in R, x^2 \geq 0$ 。 |
| Contradiction | 恆假之Proposition，如 $p \wedge \overline{p}$ 、5是3的倍數。 |
| Implication | $p \rightarrow q$，p稱為前提(premise)或假設(hypothesis)，q稱為結論。當p的真值為T與q的真值為F時，命題$p \rightarrow q$的真值為F，否則，它的真值為T。 |
| Biconditional | p若且唯若q、也可簡寫成” p iff q “$p \leftrightarrow q$。每當p與q的真值相同時，$p \leftrightarrow q$的真值就為 T，否則，其真值為F。<br>$p \leftrightarrow q = ( p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$、 |
| Equivalent | p及q兩命題，若p真q亦真，p假q亦假，且反之亦然。若$p \leftrightarrow q$恆真，稱p和q為等價，表為$p \equiv q$ 。ex: $a \rightarrow b \equiv \sim a \vee b$ |
| Compound proposition | 由數個propositions組成之proposition |

## 三、邏輯運算符號 (Logic operations)：

| 符號 | 意義 | 符號 | 意義 |
|---|---|---|---|
| $P \Rightarrow Q$ | P真則Q亦真<br>Logical implication | $P \Leftrightarrow Q$ | P真則Q亦真，反之亦然。<br>Logical equivalence |
| $P \vee Q$ | P或Q、Disjunction | $\sim P$ | 非P 、Negation |
| $P \wedge Q$ | P且Q、Conjunction | | |

**例9**：試將 “任何整數或是正的或是負的”表示成謂詞公式。

[解] 先將以上命題意譯成:對所有x ，若x是整數，則 x 或是正的或是負的。用P(x) 表示 "x是正數 " ，用Q(x)表示"x是負數"。於是，給定命題可表示成
$\forall x, x \in I \rightarrow x \in P(x) \vee x \in Q(x)$

**例10**：試將 “某些實數是有理數”表示成謂詞公式。

[解]先用$R_1(x)$表示"x是實數 "; 用$R_2(x)$表示"x是有理數"。

命題可表示成$\exists x, (R_1(x) \wedge R_2(x))$

## 四、重要等價關係：

| | |
|---|---|
| $\sim\sim p \equiv p$ | Law of Double Negation |
| $\sim( p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$、$\sim( p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ | DeMorgan’s Laws |
| $p \vee q \equiv q \vee p$、$p \wedge q \equiv q \wedge p$ | Commutative Laws |

| | |
|---|---|
| p∨(q∨r) ≡ (p∨q)∨r 、 p ∧ (q ∧r) ≡ (p ∧q) ∧r | Assocative Laws |
| p∨(q∧r) ≡ (p∨q) ∧(p∨r)、p∧ (q∨r) ≡ (p∧q) ∨ (p∧r) | Distributive Laws |
| p∨p ≡ p 、 p∧p ≡ p | Idempotent Laws |
| p∨F ≡ p 、 p∧T ≡ p | Identity Laws |
| p∨~p ≡ T 、 p∧~p ≡ F | Inverse Laws |
| p∨T ≡ T 、 p∧F ≡ F | Domination Laws |
| p∨(p∧q) ≡ p 、 p∧ (p∨q) ≡ p | Absorption |

**例11：** 證明 $p \leftrightarrow q$ 與（ $p \leftrightarrow q$ ）∧（ $q \rightarrow p$ ）等價

**例12：** 相鄰的兩家餐館，一家門口貼著"好的食物不會便宜"，另一家門口貼著"便宜的食物不會好。，這兩句話的意思是不是一樣?

**例13：** 以下推論是否正確?

若通貨膨脹，則金價上漲。

現在金價上漲，所以一定有通貨膨脹發生。

[解] 此推論表條件句[(p→q) ∧q] →p，但此命題不是恆真句，當p值為偽、q值為真時，p→q為真，(p→g) ∧q為真，因此[(p→q) ∧q] →p為偽，故此為謬誤之推論。

**例14：** Find the negation of the following statement.

$$\forall x \exists y \left[ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y) \right]$$

Sol:

$$\neg \left[ \forall x \exists y \left[ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y) \right] \right]$$

$$\Leftrightarrow \exists x \left[ \neg \exists y \left[ (p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y) \right] \right]$$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg[(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y \neg[\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \vee r(x,y)]$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y [\neg\neg[p(x,y) \wedge q(x,y)] \wedge \neg r(x,y)]$

$\Leftrightarrow \exists x \forall y [[p(x,y) \wedge q(x,y)] \wedge \neg r(x,y)]$

**例15：**

求 $\forall x \exists y$，〔$F(x, y) \rightarrow (G(x, y) \vee H(x, y))$〕

之否定命題

【解】 $\sim$〔$\forall x \exists y$，$(F \rightarrow (G \vee H))$〕

$\Leftrightarrow \exists x$，〔$\sim(\exists y$，$(F \rightarrow (G \vee H)))$〕

$\Leftrightarrow \exists x \forall y$，〔$\sim(F \rightarrow (G \vee H))$〕

$\Leftrightarrow \exists x \forall y$，〔$F \wedge (\sim(G \vee H))$〕

$\Leftrightarrow \exists x \forall y$，〔$F \wedge (\sim G) \wedge (\sim H)$〕

## 五、 排容定理：

1. $|A \cup B| \leqq |A| + |B|$；   2. $|A \cap B| \leqq \min(|A|, |B|)$
3. $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$；   4. $|A-B| \geqq |A| - |B|$
5. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
6. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

**例16：** 有30部汽車，在工廠中裝置額外配件。供選擇的配件有收音機，冷氣機和行雪胎。已知其中的 15部裝了收音機，其中的8部裝了冷氣機，其中的6部裝了行雪胎。有三部是三種額外的配件都裝了，至少有多少部車這三種配件都沒裝。

[解]：

設$A_1, A_2, A_3$分別代表30部車中，裝置了收音機、冷氣機、和行雪胎的汽車所成的集合。

$|A_1| = 15 \quad |A_2| = 8 \quad |A_3| = 6 \quad$ 並且$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 + 8 + 6 - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + 3$$
$$= 32 - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

$$\because |A_1 \cap A_2| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3|, \quad |A_1 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3|, \quad |A_2 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \leq 32 - 3 - 3 - 3 = 23$$

亦即，至多有23部車裝置這三種配件之一以上。因此，最少有7部車沒有裝置三種配件中的任一種。

**例17：** 試求從1到250的整數中可以被2或3或5或7整除的有多少個?

解:

設$A_1$代表介於1與250之間，可以被2整除的整數所成的集合，$A_2$代表同範圍中，可被3整除的整數所成的集合，$A_3$代表同範圍的整數中，可被5整除的整數所成的集合，$A_4$ 代表同範圍的整數中，可被7整除的整數所成的集合。令[x]代表小或等於x的最大整數，則

$|A_1| = [\frac{250}{2}] = 125$　　$|A_2| = [\frac{250}{3}] = 83$　　$|A_3| = [\frac{250}{5}] = 50$

$|A_4| = [\frac{250}{7}] = 35$　　$|A_1 \cap A_2| = [\frac{250}{2 \times 3}] = 41$

$|A_1 \cap A_3| = [\frac{250}{2 \times 5}] = 25$　　$|A_1 \cap A_3| = [\frac{250}{2 \times 5}] = 25$

$|A_1 \cap A_4| = [\frac{250}{2 \times 7}] = 17$　　$|A_2 \cap A_3| = [\frac{250}{3 \times 5}] = 16$

$|A_2 \cap A_4| = [\frac{250}{3 \times 7}] = 11$　　$|A_3 \cap A_4| = [\frac{250}{5 \times 7}] = 7$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [\frac{250}{2 \times 3 \times 5}] = 8$　　$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = [\frac{250}{2 \times 3 \times 7}] = 5$

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = [\frac{250}{2 \times 5 \times 7}] = 3$　　$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = [\frac{250}{3 \times 5 \times 7}] = 2$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = [\frac{250}{2 \times 3 \times 5 \times 7}] = 1$

故得 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25$
$- 17 - 16 - 11 - 7 + 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193$ □

六、 重元集：元素可不相異之集合

| 運算 | 元素重次的定義 | 範例 |
|---|---|---|
| A∪B | 此元素在A及B中重次較大的值 | A={a, a, a, c, d, d}, B ={a, a, b, c, c}<br>A∪B={a, a, a, b, c, c, d, d} |
| A∩B | 此元素在A及B中重次較小的值 | A={a, a, a, c, d, d}, B={a, a, b, c, c}<br>A∩B={a, a, c} |
| A-B | 此元素在A的重次減去在B中重次，若此差值為負，則令此元素的重次為0。 | A ={a, a, a, b, b, c, d, d, e},<br>B ={a, a, b, b, b, c, c, d, d, f}<br>A-B={a, e} |
| A+B | 此元素在A的重次加上在B中重次 | A = {a, a, b, c, c}, B = {a, b, b, d}<br>A+B={a, a, a, b, b, b, c, c, d} |

## 七、數學歸納法(Principle of mathematical induction)：對命題p(n), $n\in N$，若能證明

1. 數學歸納法：(1) $p(n_0)$成立；(2) 設p(k)成立($k\geq n_0$)，推得p(k+1)亦成立.

   則可得結論：$\forall n\in N$，$n\geq n_0$，p(n)成立。

2. 強數學歸納法：(1) $p(n_0)$成立；(2) 設p(n)於$k\geq n\geq n_0$都成立，推得

   p(k+1)亦成立。則可得結論：$\forall n\in N$，$n\geq n_0$，p(n)成立。

**例18**：利用數學歸納法證明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad n\geq 1$$

證明：1.歸納法的基礎。當 $n=1$ 時，

$$1^2=\frac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$$

2.歸納步驟：假設

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

則 $1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

**例19**： 兩個人玩拿石子遊戲 ，共放兩堆數目相同的石子。遊戲的規則是每個人可從任意一堆裏任意取出若干個石子，但不能不取，亦不能同時從兩堆裡取出。規定取得最後石子的人勝利，證明後取的人一定可以設法得勝。

[解]：

令n表每堆的石子數，P(n)表命題："若每堆有n粒石子，則依規則玩遊戲，後拿的人可以得勝。"

(1) $n=1$時，即每堆只一粒石子，先拿的人只能任選一堆拿去，剩下另一堆，後拿的人拿去，故得勝。

(2) 設P(1), P(2), ..., P(k-1)都成立，現有兩堆石子各k粒，先拿的人可從任一堆裡取出m粒，$1\leq m<k$，這時這堆還剩下k-m粒，後拿的人只要從另一堆也拿掉m粒，則兩堆同剩k-m粒，因$k-m<k$，根據假設P(k-m)成立，故後拿的人一定可以得勝。若$m=k$，則後拿的人從另一堆拿掉全部的k粒石子，亦得勝。

## 八、級數

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (4) $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$

(5) $\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^k}$ (6) $\sum_{i=0}^{k} i \times 2^i = (k-1)2^{k+1} + 2$

## 九、可數與不可數集合：

| 名詞 | 意義 | 範例 |
|---|---|---|
| 集合之一對一對應(one-to-one correspondence) | 兩集合P及Q，若P中每一元素都可在Q中找到一個相異的元素與之配對，且P和Q中的元素恰好都配成對，就稱P的元素和Q的元素one-to-one correspondence | 1. 偶數與奇數存在一對一對應.<br>2. 偶數與自然數存在一對一對應. |
| 集合的等價 | 兩集合間存在可逆函數的關係 | 1. 偶數與自然數。 F(n) = 2n |
| 有(無)限集 | 元素有(無)限的集合 | N、Z、Q為無限集 |
| 可數集(countable set) | 可一一列舉的集合，可為無限集 | N、Z、Q、N×N、可數集的交聯集、可數集的卡氏積 |
| 不可數集(uncountable set) | 不可一一列舉的集合，必為無限集 | 介於0和1的實數集 |

# 非空無限集必含一個可數無限子集(countably infinite subset)。

# 數學中常見的集合: N 自然數、 Z 整數、 Q 有理數、R 實數、 C 複數。

**例20**：證明0到1之間的所有實數是不可數無限集。

假設此集合為可數無限集，然後導出矛盾性。假設介於0和1之間的實數為一可數無限集，則根據定義，有一種1對1的對應關係介於此集合與自然數集的元素之間。利用這個1對1的對應，就可以將所有0到1之間的所有實數，一個接一個地列出來

$$
\begin{array}{l}
0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \cdots\cdots \\
0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \cdots\cdots \\
0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ \cdots\cdots \\
0.\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0.\ a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ a_{i4}\ \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots *
\end{array}
$$

其中 $a_{ij}$ 是第 $i$ 個列出的數中，小數點後面的第 $j$ 位數字。以下我們來選一個不在上面列出，但介於 0 和 1 之間的小數，利用這事實導出矛盾。即，考慮：

$$0.\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{若 } a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii} & \text{若 } a_{ii} = 0,1,2,\cdots\cdots,8 \end{cases}$$

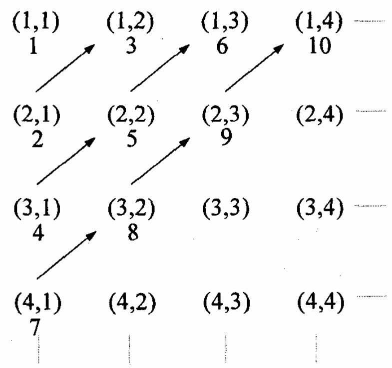
$$i = 1,2,3,4,\cdots\cdots$$

顯然地，$0.\ b_1\ b_2\ b_3 \cdots\cdots b_i \cdots\cdots$ 是一個介於 0 和 1 之間的實數，並且不會在小數點後面某一有限位之後，數字全部爲 0，（即不會形如 0.34000……）。因此根據我們的假設及規定，$0.\ b_1\ b_2 \cdots\cdots b_i \cdots\cdots$ 應該是列出的小數中的一個。但從 $0.\ b_1\ b_2 \cdots\cdots b_i \cdots\cdots$ 的定義看，$0.\ b_1\ b_2 \cdots\cdots b_i \cdots\cdots$ 這小數跟所列出的那些實數中的第一個數，小數點後的第一個數字相異，（即 $a_{11} \neq b_1$），因此這兩數不等。$0.\ b_1\ b_2 \cdots\cdots b_i \cdots\cdots$ 又跟第二個列出的小數，小數點後面的第 2 個數字不等（即 $a_{22} \neq b_2$），因此 $0.\ b_1\ b_2 \cdots\cdots \neq 0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \cdots\cdots$。……，因爲 $a_{ii} \neq b_i$，所以 $0.\ b_1\ b_2 \cdots\cdots \neq 0.\ a_{i1}\ a_{i2} \cdots\cdots a_{ii} \cdots\cdots$，……等等。故 $0.\ b_1\ b_2\ b_3 \cdots\cdots$ 不在所列出的小數中。這與原先的假設矛盾。即介於 0 和 1 之間的所有實數集，是一個不可數無限集（uncountably infinite set）。

例21：證明N×N為可數集。

【證明】

希望找一個 $f: N \times N \to N$ 為一對一且映成，該函數相當於對 $N \times N$ 的元素在 $N$ 中做編號，利用對角線的方式做編號，如下圖所示：




寫成函數表示為 $f(i,j) = \sum_{k=1}^{i+j-2} k + j = \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + j$

由編號的方式很容易可以驗證 $f$ 為一對一且映成的函數，所以 $N \times N \sim N$，所以 $N \times N$ 為可數集