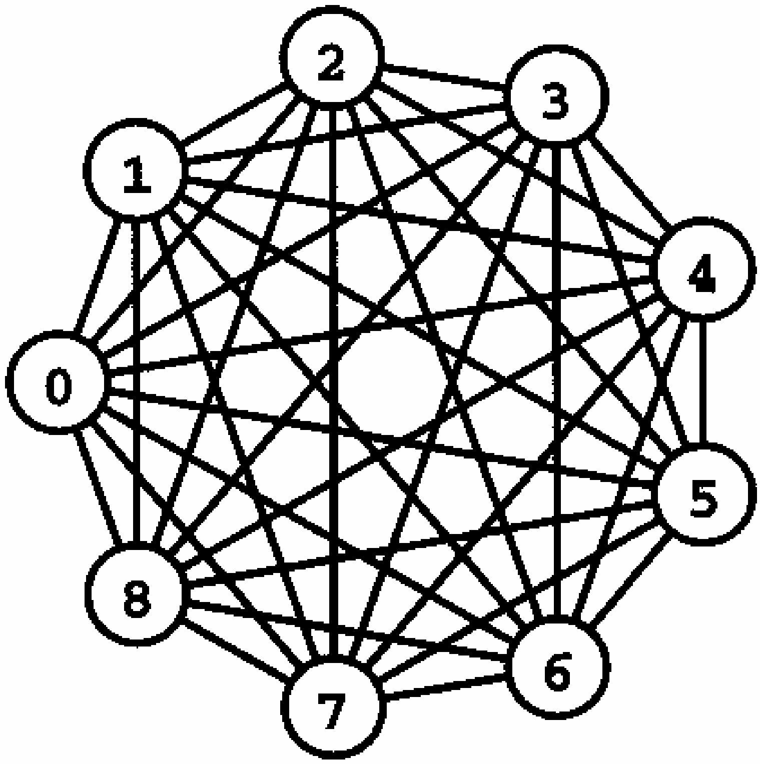
遞迴關係



黎 靖 編著

南台科大電子系

1. 遞迴函數：自身定義的之函數。

例 1: 階乘函數

$$n! = \begin{cases} 1 & if \ \ n = 0 \\ n \times (n-1)! & if \ \ n > 0 \end{cases}$$

例 2: Fibonacci 數列

$$F_i = \begin{cases} i & if \ \ i = 0, 1 \\ F_{i-1} + F_{i-2} & if \ \ i > 1 \end{cases}$$

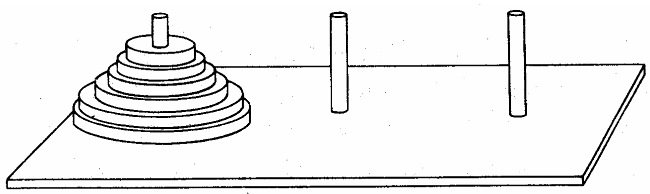
例 3: Euclid's algorithm

$$GCD(n,m) = \begin{cases} GCD(m.n) & if \ \ n < m \\ m \quad if \ \ n \geq m \ and \ n \bmod m = 0 \\ GCD(m, n \bmod m) & otherwise \end{cases}$$

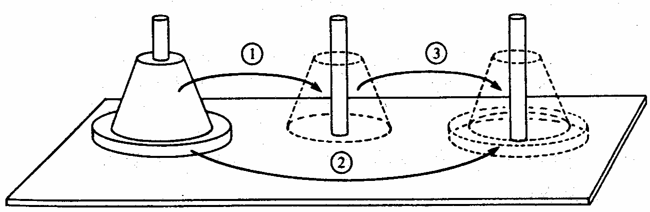
Example : gcd(314159, 271828)

gcd(271828, 42331)
gcd(42331, 17842)
gcd(17842, 6647)
gcd(6647, 4458)
gcd(4458, 2099)
gcd(2099, 350)
gcd(350, 349)
gcd(349, 1)
gcd(1, 0)

例 4: Hanoi Towers



Towers of Hanoi



2. 遞迴關係式：數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 中第 n 項可以用前若干項表示，得到之關係式稱為遞迴關係式。有下列的解法：

(1) 消去法：用於一階的差分方程式。

(2) 數學歸納法：用於一階的差分方程式且結果已知之情況。

(3) 特徵方程式法：用於二階以上的差分方程式

(4) 轉換法：特殊變數時使用

3.消去法

例 5: F(n)= F(n-1) + n, for n ≥ 2 with F(1)=1,　　find F(n)=?

Sol：　　F(n) = F(n-1) + n

$F(n-1) = F(n-2) + n$

.

.

$F(2) = F(1)+1$

$\Rightarrow F(n) = n+(n-1)+\ldots+1 = n(n+1)/2$

4. 轉換法

題型	轉換	結果
$f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)$	$n = 2^k$	$f(2^k) = f(2^{k-1})$
$f(n)=\frac{n}{n-1}f(n-1)$	$g(n)=\frac{f(n)}{n}$	$g(n) = g(n-1)$
$f(n) = f(n-1)^a$	$g(n) = \log f(n)$	$g(n) = a\, g(n-1)$
$f(n) + n\, f(n-1) = n!$	$g(n)=\frac{f(n)}{n!}$	$g(n) + g(n-1) = 1$

例 6: $f(n) = f(n/2)+1$, for $n \geqq 2$ with $f(1)=1$, find $f(n)$=?

Sol： Let $n=2^k$

$f(2^k)= f(2^{k-1}) +1$

$f(2^{k-1})= f(2^{k-2}) +1$

.

.

$f(2)= f(1)+1$

$\Rightarrow f(n) = k+1 = \lfloor \lg n \rfloor +1$

例 7: $f(n) = 2\times f(n/2)+n$, for $n \geq 2$ with $f(1) = 0$, find $f(n) = ?$

Sol：

Let $n=2^k$

$$f(2^k)=2f(2^{k-1})+2^k$$

$$\frac{f(2^k)}{2^k}=\frac{f(2^{k-1})}{2^{k-1}}+1$$

$$\frac{f(2^{k-1})}{2^{k-1}}=\frac{f(2^{k-2})}{2^{k-2}}+1$$

.

.

$$\frac{f(2)}{2}=\frac{f(1)}{1}+1$$

$$\Rightarrow \frac{f(2^k)}{2^k}=k \Rightarrow f(n) = n \times \lg n$$

例 8:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1}^2, \quad n \ge 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$ 求 a_n = ?

【解】

$a_n = 3a_{n-1}^2$

$\log a_n = \log(3a_{n-1}^2) = \log 3 + 2\log a_{n-1}$

令 $b_n = \log a_n$

則 $\begin{cases} b_n = 2b_{n-1} + \log 3, n \ge 1 \\ b_0 = \log a_0 = \log 1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_{n-1} + \log 3 \\ &= 2(2b_{n-2} + \log 3) + \log 3 = 2^2 b_{n-2} + 2\log 3 + \log 3 \\ &= \ldots \\ &= 2^n b_0 + 2^{n-1}\log 3 + 2^{n-2}\log 3 + \ldots + 2\log 3 + \log 3 \\ &= (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1)\log 3 \\ &= \frac{2^n - 1}{2-1}\log 3 = (2^n - 1)\log 3 \end{aligned}$$

所以 $a_n = 10^{b_n} = 10^{(2^n-1)\log 3} = (10^{\log 3})^{2^n-1} = 3^{2^n-1}, n \ge 0$

5. 特徵方程式法

令 $k \in \boldsymbol{N}, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_{n-k} \in \boldsymbol{R}, c_n, c_{n-k} \ne 0, a_n, n \ge 0$, 為一數列, 則

$$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = f(n)$$

稱為一 k 階常係數遞迴關係式(linear recurrence relation with constant coefficients of order k)

當 $f(n) = 0$, $\forall n \ge 0$, 時此遞迴關係式稱為齊次(homogeneous) 遞迴關係式, 否則稱為非齊次(nonhomogeneous) 遞迴關係式

5.1 齊次解：

$c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \ldots + c_{n-k}a_{n-k} = 0$

令 $a_n = A\alpha^n$ 代入得

$c_n A\alpha^n + c_{n-1}A\alpha^{n-1} + \ldots + c_{n-k}A\alpha^{n-k} = 0$

$\Rightarrow A\alpha^{n-k}(c_n\alpha^k + c_{n-1}\alpha^{k-1} + \ldots + c_{n-k}) = 0$

稱 $c_n\alpha^k + c_{n-1}\alpha^{k-1} + \ldots + c_{n-k} = 0$ 為該遞迴關係式的特徵方程式(characteristic equation)且稱 α 為特徵根(characteristic root), 討論其特徵根的有幾種不同的情形

特徵值	解
相異根 α_1、α_2、…、α_r	$\sum_{i=0}^{r} c_i(\alpha_i)^n$
出現 α 的 m 重根	此根之解為 $(C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \ldots + C_{m-1}n^{m-1})\alpha^n$

出現根 $r\angle\pm\theta$	此根之解為 $r^n(B_1\cos n\theta + B_2\sin n\theta)$

例 9: $\begin{cases} a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0, & n \ge 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 2 \end{cases}$ 求 $a_n = ?$

【解】

特徵方程式 $\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 2, -3$

$\Rightarrow a_n = c_1 2^n + c_2(-3)^n$ 代入邊界條件

$\begin{cases} 1 = a_0 = c_1 + c_2 \\ 2 = a_1 = 2c_1 - 3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$

所以 $a_n = 2^n, n \ge 0$

例 10: $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \ge 2 \\ F_0 = 0, F_1 = 0 \end{cases}$ 求 $F_n = ?$

【解】

$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$

特徵方程式 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow F_n = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 代入邊界條件

$\begin{cases} 0 = F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_1\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\Rightarrow F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], n \ge 0$

例 11: $a_n - 7a_{n-1} + 16a_{n-2} - 12a_{n-3} = 0$, 求 $a_n = ?$

【解】

特徵方程式 $\alpha^3 - 7\alpha^2 + 16\alpha - 12 = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 2)^2(\alpha - 3) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 2, 2, 3$

所以 $a_n = (c_1 + c_2 n)2^n + c_3 3^n$

本題未給邊界條件，上述即為答案

例 12: $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, & n \ge 3 \\ a_1 = 1, a_2 = 0 \end{cases}$ 求 $a_n = ?$

【解】

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

特徵方程式 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\rho = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

所以 $a_n = B_1 \cos\frac{n}{3}\pi + B_2 \sin\frac{n}{3}\pi$，代入邊界條件

$$\begin{cases} 1 = a_1 = B_1 \cos\frac{\pi}{3} + B_2 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \\ 0 = a_2 = B_1 \cos\frac{2\pi}{3} + B_2 \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \cos\tfrac{n}{3}\pi + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{n}{3}\pi$$

例 13： $\begin{cases} \sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}, \quad n \ge 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$ 求 a_n = ?

【解】

令 $b_n = \sqrt{a_n}$

則 $\begin{cases} b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}, n \ge 2 \\ b_0 = \sqrt{a_0} = 1, b_1 = \sqrt{a_1} = 1 \end{cases}$

特徵方程式 $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$

$$\Rightarrow (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -1, 2$$

$\Rightarrow b_n = c_1(-1)^n + c_2 2^n$，代入邊界條件

$$\begin{cases} 1 = b_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = b_1 = -c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n$$

所以 $a_n = b_n^2 = \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)^2, n \ge 0$

5.2 非齊次解：包括齊次解及特解。

(a) 求齊次解(含未定係數)

(b) 求特解

(c) 特解代入原式，求出特解的未定係數。

(d) 全解 = 齊次解 + 特解

(e) 代入初始條件，求出齊次解的未定係數。

5.3 特解：

(a) 差分方程式的等號之右邊包含 n^k

特解包含 $\sum_{i=0}^{k} c_i n^i$ 。

(b) 差分方程式的等號之右邊包含 a^n，常數 k 視為 $k \cdot 1^n$。

(1) a 不是特徵根：特解包含 $c_0 a^n$

(2) a 是特徵根且為 r 重根：特解包含 $a^n \sum_{i=0}^{r} c_i n^i$ 。

例 14： $\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 4n - 5, \quad n \ge 2 \\ a_0 = 2, a_1 = 4 \end{cases}$ 求 $a_n = ?$

【解】

特徵方程式 $\alpha^2 - 7\alpha + 10 = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 5)(\alpha - 2) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 2, 5$

$\Rightarrow a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 5^n$

因為特徵根不含 1

令 $a_n^{(p)} = d_0 + d_1 n$ 代入原遞迴關係式

$(d_0 + d_1 n) - 7(d_0 + d_1(n-1)) + 10(d_0 + d_1(n-2)) = 4n - 5$

$\Rightarrow 4d_1 n + (4d_0 - 13d_1) = 4n - 5$

$\Rightarrow \begin{cases} 4d_1 = 4 \\ 4d_0 - 13d_1 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_0 = 2 \\ d_1 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n^{(p)} = n + 2$

則 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 2^n + c_2 5^n + n + 2$ 代入邊界條件

$\begin{cases} 2 = a_0 = c_1 + c_2 + 2 \\ 4 = a_1 = 2c_1 + 5c_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{1}{3} \\ c_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

所以 $a_n = -\dfrac{1}{3} \cdot 2^n + \dfrac{1}{3} \cdot 5^n + n + 2$

例 15： $\begin{cases} a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2, \quad n \ge 2 \\ a_0 = 1, a_1 = 1 \end{cases}$ 求 $a_n = ?$

【解】

特徵方程式 $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1, 1$

$\Rightarrow a_n^{(h)} = (c_1 + c_2 n) \cdot 1^n = c_1 + c_2 n$

因為 1 為其特徵根(二重根)

令 $a_n^{(p)} = d_0 + d_1 n + d_2 n^2$ 代入原遞迴關係式

$(d_0 + d_1 n + d_2 n^2) - 2(d_0 + d_1(n-1) + d_2(n-1)^2)$

$\quad + (d_0 + d_1(n-2) + d_2(n-2)^2) = 2$

$n = 0$ 代入

$d_0 - 2d_0 + 2d_1 - 2d_2 + d_0 - 2d_1 + 4d_2 = 2$

$\Rightarrow 2d_2 = 2$

$\Rightarrow d_2 = 1$

至於 d_0, d_1 在此時無法求出，留到利用邊界條件再求

即 $a_n^{(p)} = d_0 + d_1 n + n^2$

則 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 + c_2 n + d_0 + d_1 n + n^2$

$= (c_1 + d_0) + (c_2 + d_1)n + n^2$

$= c_3 + c_4 n + n^2$ 代入邊界條件

$$\begin{cases} 1 = a_0 = c_3 \\ 1 = a_1 = c_3 + c_4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = -1 \end{cases}$$

所以 $a_n = 1 - n + n^2$

例 16： $a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3\times 2^n$，　求 $a_n = ?$

【解】

特徵方程式 $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$\Rightarrow (\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = -2, 1$

因為 2 不為特徵根

令 $a_n^{(p)} = c_1 2^n$ 代入原遞迴關係式

$c_1 2^n + c_1 2^{n-1} - 2c_1 2^{n-2} = 3 \cdot 2^n$

$\left(c_1 + \frac{c_1}{2} + \frac{2c_1}{4}\right)2^n = 3\cdot 2^n \Rightarrow c_1 2^n = 3\cdot 2^n$

$\Rightarrow c_1 = 3$

$\Rightarrow a_n^{(p)} = 3 \cdot 2^n$

例 17： $\begin{cases} a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2\times 3^n, \quad n \geq 2 \\ a_0 = 2,\ a_1 = 13 \end{cases}$　求 $a_n = ?$

【解】

特徵方程式 $\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$

$\Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 3) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1, 3$

$\Rightarrow a_n^{(h)} = c_1(1)^n + c_2(3)^n = c_1 + c_2(3)^n$

因為 3 為特徵根

令 $a_n^{(p)} = (d_1 + d_2 n)3^n$ 代入原遞迴關係式

$(d_1 + d_2 n)3^n - 4(d_1 + d_2(n-1))3^{n-1} + 3(d_1 + d_2(n-2))3^{n-2} = 2 \cdot 3^n$

$n = 2$ 代入得

$9(d_1 + 2d_2) - 12(d_1 + d_2) + 3d_1 = 18$

$\Rightarrow 6d_2 = 18$

$\Rightarrow d_2 = 3$

在此時還無法求出 d_1

所以 $a_n^{(p)} = (d_1 + 3n)3^n$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 + c_2(3)^n + (d_1 + 3n)3^n$

$= (c_1 + d_1) + (c_2 + 3n)3^n$

$= c_3 + (c_2 + 3n)3^n$ 代入邊界條件

$$\begin{cases} 2 = a_0 = c_3 + c_2 \\ 13 = a_1 = c_3 + 3(c_2 + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a_n = 1 + (1 + 3n)3^n$

例 18：$\begin{cases} a_n + n a_{n-1} = n!, \quad n \ge 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$ 求 a_n = ?

【解】

$a_n + n a_{n-1} = n!$

$\Rightarrow \frac{a_n}{n!} + \frac{n a_{n-1}}{n!} = 1$

$\Rightarrow \frac{a_n}{n!} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = 1$

令 $b_n = \frac{a_n}{n!}$

$\Rightarrow \begin{cases} b_n + b_{n-1} = 1, n \ge 1 \\ b_0 = \frac{a_0}{0!} = 1 \end{cases}$

特徵方程式 $\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow \alpha = -1$

$\Rightarrow b_n^{(h)} = c_1(-1)^n$

令 $b_n^{(p)} = c_2$ 代入原遞迴關係式

$c_2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$

則 $b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)} = c_1(-1)^n + \frac{1}{2}$ 代入邊界條件

$1 = b_0 = c_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$

$\Rightarrow a_n = n! b_n = \frac{n!}{2}\left(1 + (-1)^n\right), n \ge 0$

6. 生成函數法：若 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 為 a_n 之生成函數，則可將差分方程式中之 a_n 乘 x^n，並取其和，可得 A(x)的關係式，據此解 A(x)，再求 a_n 之解。步驟如下:

1. 令解為 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，並帶入關係式。

2. 全部項都化成 A(x)形式。Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x)$

3. 化成封閉形式。Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} c\, x^n = cx \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{cx}{1-x}$

4.展開成部分分式形式。Ex: $\frac{4}{(1-x)(x+3)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+3}$

5. 化成數值函數：根據關係式又可分成下列形式：

令 $A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 為數列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ 的生成函數

Case 1 : (a_n−型)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = A(x) - a_0$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = A(x) - a_0 - a_1 x$

(3) $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2$

Case 2 : (a_{n-1}–型)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = a_0x + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots = xA(x)$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n = a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots = x\left(A(x) - a_0\right)$

(3) $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^n = a_2x^3 + a_3x^4 + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots = x\left(A(x) - a_0 - a_1x\right)$

Case 3 : (a_{n-2}–型)

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = x^2A(x)$

(2) $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^n = x^2\left(A(x) - a_0\right)$

(3) $\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-2}x^n = x^2\left(A(x) - a_0 - a_1x\right)$

$\vdots$

同理可推 $a_{n-3}, a_{n-4}, \ldots$諸型,

例 19： $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, & n \ge 2 \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$ 求 a_n = ?

【解】

令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \ge 2$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

$\Rightarrow A(x) - a_0 - a_1x = x(A(x) - a_0) + x^2A(x)$

$\Rightarrow A(x) - x = xA(x) + x^2A(x)$

$\Rightarrow (1 - x - x^2)A(x) = x$

$\Rightarrow A(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

令 $\dfrac{x}{1-x-x^2} = \dfrac{A}{1-\alpha x} + \dfrac{B}{1-\beta x}$，其中 $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow x = A(1 - \beta x) + B(1 - \alpha x)$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -A\beta - B\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

所以 $A(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{1-\alpha x} + \dfrac{1}{1-\beta x}\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^n - \beta^n)x^n\right)$

即 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), n \ge 0$

此即為第 n 階的 Fibonacci 數

例 **20**： $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}+7, & n\ge 1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$ 求 a_n = ?

【解】

令 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$a_n = 2a_{n-1}+7, n\ge 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$\Rightarrow A(x)-a_0 = 2xA(x)+\dfrac{7x}{1-x}$

$\Rightarrow A(x) = 2xA(x)+\dfrac{7x}{1-x}$

$\Rightarrow (1-2x)A(x)=\dfrac{7x}{1-x}$

$\Rightarrow A(x)=\dfrac{7x}{(1-x)(1-2x)}$

令 $\dfrac{7x}{(1-x)(1-2x)}=\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{1-2x}$

$\Rightarrow 7x = A(1-2x)+B(1-x)$

$\Rightarrow A=-7, B=7$

$\Rightarrow A(x)=7\left(\dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}\right)$

$\quad = 7\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$

$\quad = \sum_{n=0}^{\infty} 7(2^n-1)x^n$

所以 $a_n = 7(2^n-1), n\ge 0$

8. 特殊類型

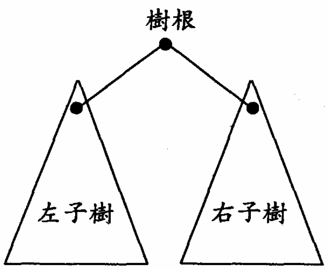
$A(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 為數列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$的生成函數

$$\begin{aligned}A(x)^2 &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\\ &= a_0a_0+(a_0a_1+a_1a_0)x+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^2+\ldots\\ &\quad +(a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_{n-1}a_1+a_na_0)x^n+\ldots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_{n-1}a_1+a_na_0)x^n\end{aligned}$$

即 $A(x)^2$ 為數列 $a_0a_0, a_0a_1+a_1a_0, \ldots, a_0a_n+a_1a_{n-1}+\ldots+a_{n-1}a_1+a_na_0, \ldots$的生成函數

例 **21**： 求 n 個節點所能構成之二元樹的個數。

【解】二元樹



令 a_n 為 n 個節點的相異二元樹個數

若左子樹有 k 個節點，則右子樹有 $n-k-1$ 個節點，$k=0, 1, \ldots, n-1$

$k=0$ 時有 a_0a_{n-1} 種二元樹

$k=1$ 時有 a_1a_{n-2} 種二元樹

$\vdots$

$k=n-1$ 時有 $a_{n-1}a_0$ 種二元樹

所以 $a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0$

當只有一個節點時只有 1 個二元樹，即 $a_1 = 1$

為了方便起見，令 $a_0 = 1$ 並不會影響上面的遞迴關係式

得到下列的遞迴關係式

$$\begin{cases} a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0, n \ge 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

令 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0, n \ge 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0)x^n$$

$$\Rightarrow A(x) - a_0 = x\sum_{n=1}^{\infty} (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0)x^{n-1}$$

$$\Rightarrow A(x) - 1 = xA(x)^2$$

$$\Rightarrow xA(x)^2 - A(x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n 4^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\cdots(\frac{2n-3}{2})}{n!} (-1)^n 2^n 2^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(1)(3)\cdots(2n-3)2^n}{n!} x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)(3)\cdots(2n-3)(2n-1)2^n}{n!(2n-1)} x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!2^n}{(2)(4)(6)\cdots(2n)n!(2n-1)} x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!(2n-1)} x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \binom{2n}{n} x^n$$

由上式知 $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ 為負數，所以 $A(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$ 取負號

即 $A(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

$$=\frac{1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\binom{2n}{n}x^n}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\binom{2n}{n}x^{n-1}$$

所以 a_n 為 $A(x)$ 中 x^n 的係數，即

$$a_n=\frac{1}{2}\frac{1}{2(n+1)-1}\binom{2(n+1)}{n+1}$$

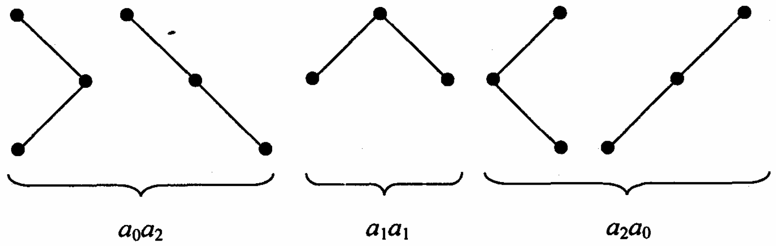
$$=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

【注意事項】

(1)上列導出的 $a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 稱為第 n 階的 Catalan 數(nth Catalan number),

我們將它記為 C_n

(2)例如 $n=3$ 時 $C_3=5$ 有 5 個二元樹如下：



9. 數學歸納法

例 22：$T(n)\le\begin{cases}b, & if\ 0\le n\le 1\\ cn+\frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T(j), & if\ n>1\end{cases}$

用數學歸納法證明 $T(n)\le 2(b+c)n\ln n,\quad n\ge 2$

Pf:

(1) n=2

$$T(2)\le 2c+\frac{2}{2}\sum_{j=0}^{1}T(j)=2c+T(0)+T(1)=2(b+c)$$

$$\le 2(b+c)2\ln 2,\quad \text{成立}$$

(2) 設 $2\le n<m$ 時命題成立，即 $T(n)\le 2(b+c)n\ln n,$

(3) 當 $n=m$ 時

$$T(m)\le cm+\frac{2}{m}\sum_{j=0}^{m-1}T(j)$$

$$\le cm+\frac{4b}{m}+\frac{2}{m}\sum_{j=2}^{m-1}T(j)$$

$$\le cm+\frac{4b}{m}+\frac{2}{m}\sum_{j=2}^{m-1}\left[2(b+c)j\ln j\right]$$

$$\le cm+\frac{4b}{m}+\frac{4(b+c)}{m}\sum_{j=2}^{m-1} j\ln j$$

$$\le cm+\frac{4b}{m}+\frac{4(b+c)}{m}\int_2^m x\ln x dx$$

$$\le cm+\frac{4b}{m}+\frac{4(b+c)}{m}\left(\frac{m^2\ln m}{2}-\frac{m^2}{4}\right)$$

$$\le cm+\frac{4b}{m}+2(b+c)m\ln m-(b+c)m$$

$$\le 2(b+c)m\ln m+\frac{b}{m}\left(4-m^2\right)]$$

$$\le 2(b+c)m\ln m$$

故得證