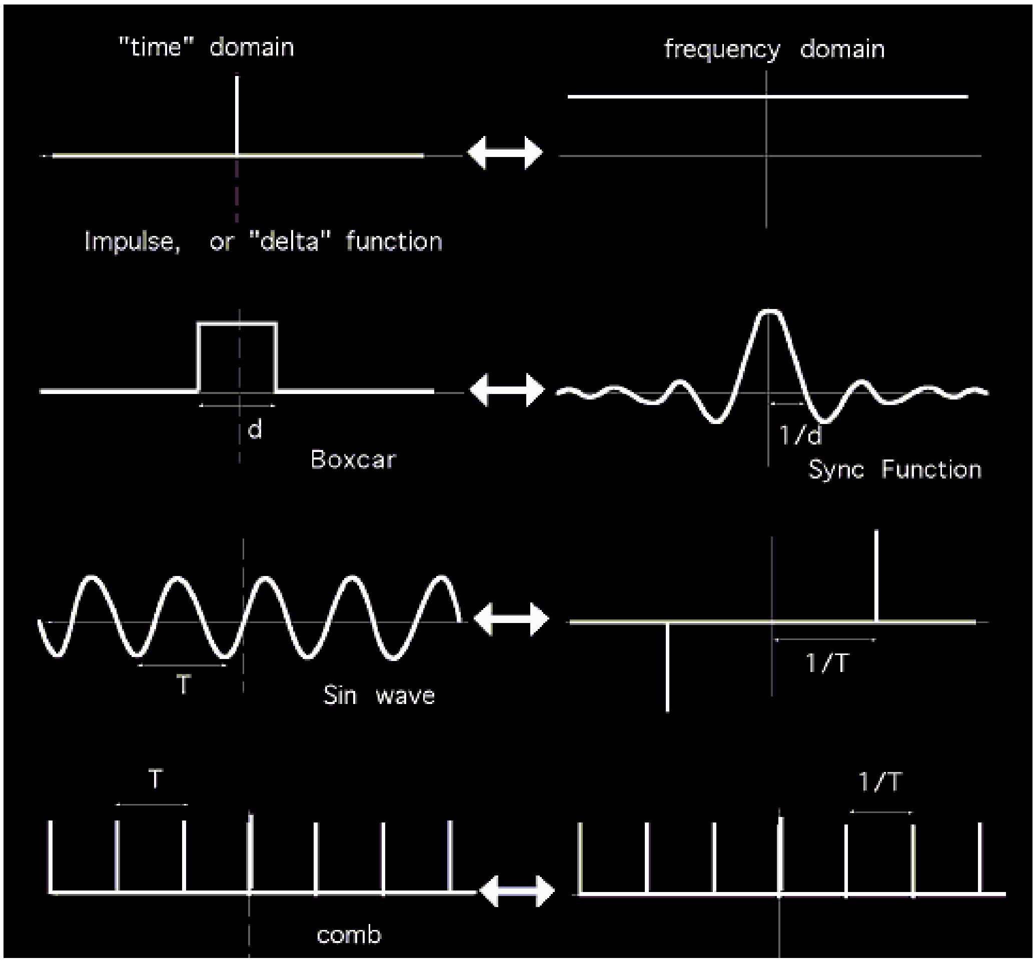
週期訊號與濾波器之模擬與分析



學號/學生： 49536092/張俊傑

49536093/林正育

指導老師：余兆棠 教授

98 年 10 月 22 日

目錄

圖目錄

1.1　實習目的

本實習主要探討週期信號的特性與其傅利葉級數分析，透過基本的餘弦波及傅利葉級數分析，可學到週期信號(periodic signal)在時域與頻域的特性。

1.2　理論分析

1.2.1 弦波信號時域分析

最常用的連續時間弦波信號(sinusoidal signal)表示為

$$x(t)=A\cos(w_0t+\theta)=A\cos(2\pi f_0t+\theta) \tag{1.1}$$

其中A、w_0(或 f_0)及 θ 分別是x(t)的振幅峰值(peak amplitude)、基本頻率(fundamental frequency)及相位(phase)，弦波信號是週期信號，週期為 $T_0=1/f_0=2\pi/w_0$，此弦波信號如圖一所示。給定振幅峰值(以下簡稱振幅)、頻率及相位三個參數則表示給定了一個弦波信號，如圖1。

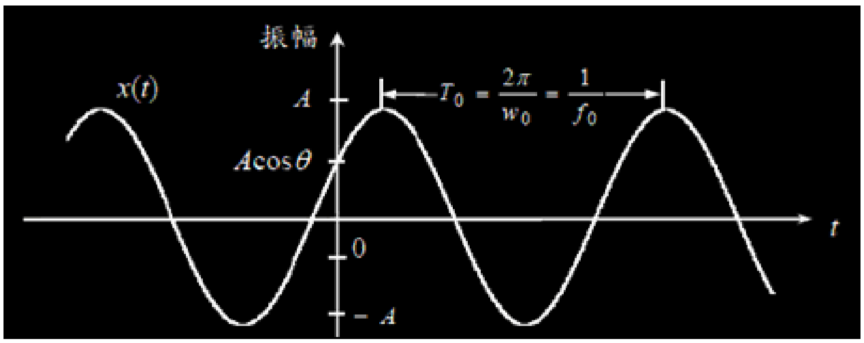


圖 1 連續時間弦波信號

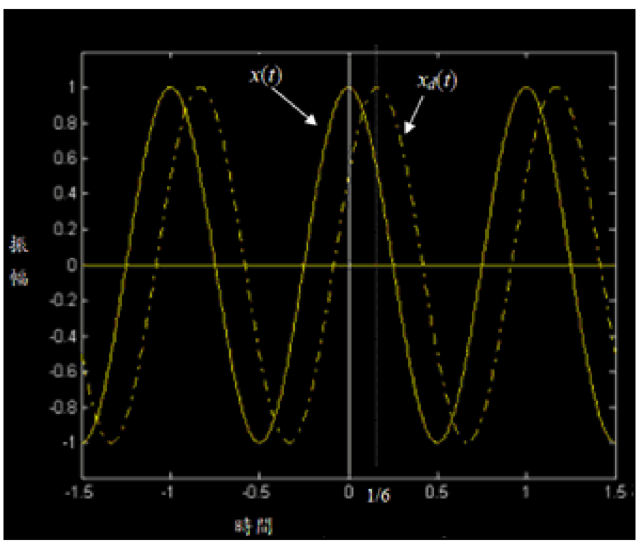


圖 2 相位差為 $\varphi=\pi/3$(時間差=1/ 6 d_t)的兩弦波信號

在時域分析信號時，信號相位可以表示信號超前或落後的情況，考量(1.1)式之弦波信號 $x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ 延遲(delay) d_t 可表示為

$$\begin{aligned} x_d(t) &= x(t-t_d) = A\cos\left(2\pi f_0 (t-t_0)+\theta\right) \\ &= A\cos\left(2\pi f_0 t+\theta-2\pi f_0 t_d\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

顯然信號 x(t) 與 $x_d(t)$ 在時間差造成的效應相當於相位角相差 $\varphi=2\pi f_0 t_d$；換言之，兩弦波信號之相位差為φ時，代表此兩弦波信號之時間延遲(time delay)為 $t_d=\varphi/2\pi f_0$ ，圖2描繪相位差為 $\varphi=\pi/3$ 的兩餘弦信號（ $f=1,\ \theta=0,\ t_d=1/6$ ）。

前述表示式出現了兩個頻率符號 w_0 和 f_0 ，其中 w_0 稱為基本角頻(fundamental angular frequency) ， 單位是弳度 / 秒(rad/sec) ；而 f_0 稱為基本頻率(fundamental frequency)，單位是赫茲(Hz)或1/sec。這兩個頻率之間存在一個常數倍2π ，我們用圖3說明這兩個頻率的關係，基本頻率看成每秒轉多少圈(次)，基本角頻率則是每秒轉多少弳度，已知轉一圈360 度= 2π ，因此這兩個頻率的關係為 $w_0=2\pi f_0 t$ 。

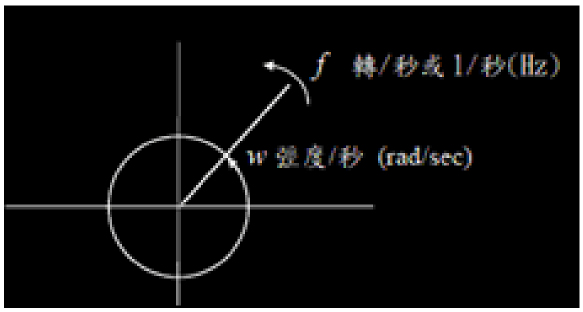


圖 3 頻率及角頻率之關係示意圖

1.2.2弦波信號頻域分析

單邊頻譜

檢視弦波信號 $A\cos(2\pi f_0 t)$ 是一個單頻信號，也就是說弦波信號只有單一個頻率而已，例如，253 Hz 的弦波，其頻率就是 253 Hz。因此我們可直覺地想成單頻信號的振幅大小和相位都只集中在單一頻率 f_0 那一點，以此直覺觀念可以很容易將此信號的振幅大小和相位對應頻率加以繪圖，如圖 4 所示。因為此種繪圖方式之橫軸為頻率，所以可稱為頻域表示法，其實圖 4 所示就是我們所謂的頻譜(spectrum)，此種將信號頻譜只表示於正頻率(分佈於 $f\geq 0$)之繪圖稱為單邊頻譜(single-sided spectrum)。注意到，因為振幅大小和相位都只集中在單一頻率 f_0 那一點，所以頻譜繪圖時以脈衝信號表示。

雙邊頻譜

利用歐拉公式(Euler formula)將弦波信號改寫成：

$$A\cos\left(2\pi f_0 t+\theta\right)=\frac{A}{2}\left(e^{i(2\pi f_0 t+\theta)}+e^{-i(2\pi f_0 t+\theta)}\right) \tag{1.3}$$

複指數亦是一單頻信號，以前述弦波之直覺頻譜繪製法，可得圖五 所示之頻譜。檢視(1.3)式或圖5，顯然，弦波信號可拆解成兩個複指數之和，兩個複指數的強度大小皆為原弦波信號振幅的一半且分佈於頻率 f_0與$-f_0$，相位則為θ與$-\theta$分別對應於 f_0與$-f_0$。因為利用歐拉公式轉換引介一個負頻率的概念，即在頻率$-f_0$那一點佔有信號的強度和相位。在討論弦波信號時並無所謂的負頻率，既然是同一個單頻信號，實際上並無法去分成正頻率與負頻率兩個部份，所謂的負頻率只是在頻域以數學方便表示、運算或說明信號所引介的概念，實際上並無負頻率的情況，讀者不必去區分正負頻率。包含正負頻率的頻譜稱為雙邊頻譜(double-sided spectrum) ，即頻譜分佈在 $f=0$的兩邊。

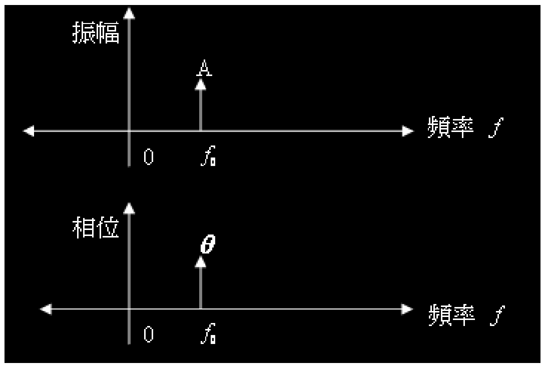


圖 4 弦波信號 $A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ 的單邊頻譜

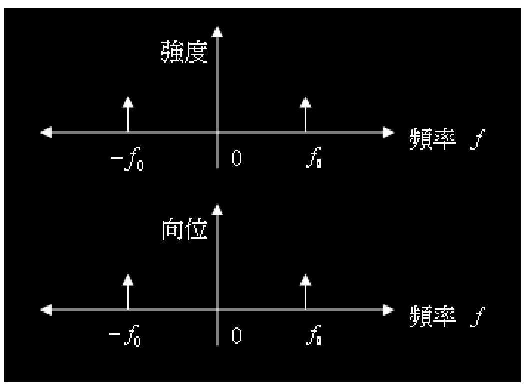


圖 5 弦波信號 $A\cos(2\pi f_0 t+\theta)$ 的雙邊頻譜

1.2.3傅利葉級數分析

週期訊號之合成

給定n個連續時間週期信號 $x_i(t), i=0,\cdots,n-1$，其基本頻率分別為 $f_i, i=0,\cdots,n-1$，當這n個基本頻率 f_i 的最大公因數存在而且等於 f_0 時，其和信號 $x_{sum}(t)=\sum_{i=0}^{n-1} x_i(t)$ 是一週期信號，且這個和信號的基本頻率即是此最大公因數 f_0。反過來看此問題，給定n個連續時

間週期信號 $x_i, i=0,\cdots,n-1$，其基本頻率分別為 $f_i, i=0,\cdots,n-1$ 令這n個基本頻率 f_i 的最大公因數為 f_0，那麼這些週期信號乘上不同常數再相加之和信號 $x_{sum}(t)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i(t)$ 為一週期信號，其中 a_i 為任意常數(可以為複數)；也就是說，配置不同的 $a_i, i=0,\cdots,n-1$ 組合，可以產生許多各式各樣基本頻率為 f_0 的週期信號 ，此方式可看成一週期訊號的合成。

週期訊號之解析

前一論述之結論：「將足夠數量(n 夠大，理論上n 可至∞)的弦波信號乘上不同係數再相加可以合成任何基本頻率為 f_0 的週期信號，只要這些弦波信號的基本頻率間的最大公因數是 f_0」，反過來說，任何週期信號可由不同的振幅、頻率和相位之弦波所組成，這便是傅利葉級數要陳述的觀念，即一個基本頻率為 f_0 的週期信號可表示成複數傅利葉級數(complex Fourier series)：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad \text{其中} \quad c_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt \qquad (1.4)$$

也可表示成所謂的三角傅利葉級數：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2\pi n f_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(2\pi n f_0 t) \qquad (1.5)$$

其中

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(2\pi n f_0 t)dt \qquad (1.6)$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(2\pi n f_0 t)dt \qquad (1.7)$$

也可改寫成另外一種傅利葉級數表示式

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(2\pi n f_0 t+\phi_n) \qquad (1.8)$$

其係數與三角傅利葉級數係數間之關係為

$$c_0=\frac{a_0}{2}; \qquad c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}; \qquad \phi_n=-\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} \qquad (1.9)$$

觀察上述週期信號的傅利葉級數表示式，綜合整理並說明幾個重點或所代表的物理意義如下：

- $C_0=c_0=a_0/2$ 代表週期信號的直流成份，即週期信號的平均值。
- 基本頻率 f_0 之週期信號可分解成不同頻率之成份，或是說由不同頻率成份可組成此週期信號，其中每一個頻率成份都是單頻的弦波(或複指數)型式，其頻率分別是 f_0 的整數倍。這個最小頻率 f_0 稱為此週期信號之基本頻率。其他 f_0 的整數倍頻率稱為諧波(harmonics)，即 nf_0 稱為n次諧波，例如 $69f_0$ 稱為69次諧波。
- 週期信號的週期與其基本頻率成份這個弦波的週期相等 。

範例　圖 6 為一方波週期信號 $x(t)$ 之時域波形，其週期為 T_0（基本頻率為 f_0），求此信號之複指數傅利葉級數以及三角傅利葉級數表示式。

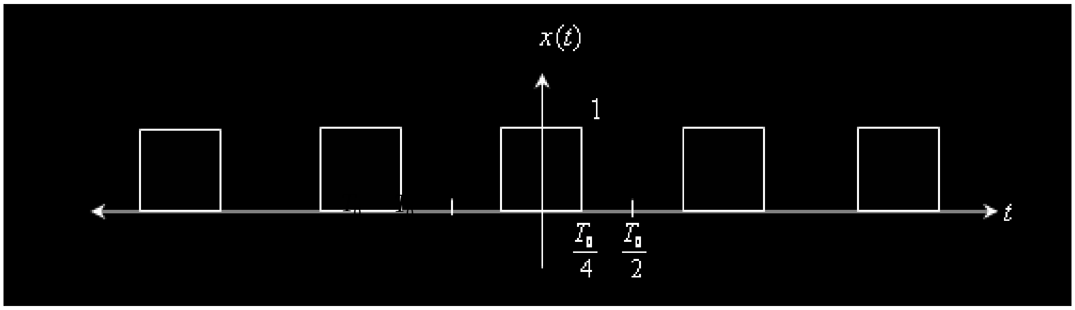


圖 6 一方波週期信號之時域波形

(i)複指數傅利葉級數

已知週期信號 $x(t)$，欲以傅利葉級數表示此信號 $x(t)$，首要工作是依(1.4)式計算係數。

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} 1dt = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{-j2\pi nf_0 t}dt \\ &= \frac{1}{-j2\pi n}[e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}] = \frac{1}{n\pi}[\frac{e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}}{j2}] \\ &= \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k \neq 0 \\ (-1)^k \dfrac{1}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

依(1.4)式將此方波週期信號 $x(t)$ 表示成以下之複指數傅利葉級數式展開式。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nf_0 t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} e^{j2\pi(2k+1)f_0 t}$$

(ii)三角傅利葉級數

此方波週期信號 $x(t)$ 為實數，其三角傅利葉級數之係數

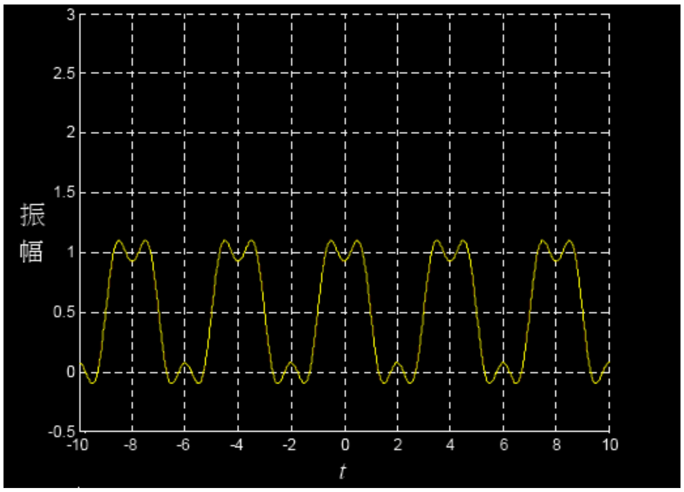
$$a_{2k} = 2\mathrm{Re}[c_{2k}] = 0, k \neq 0 \qquad a_{2k+1} = 2\mathrm{Re}[c_{2k+1}] = (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}[c_n] = 0 \qquad\qquad \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{2}$$

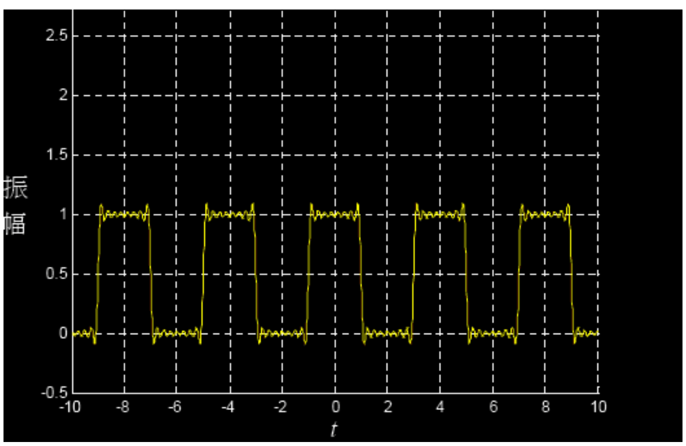
最後將此方波週期信號 $x(t)$ 表示成以下之三角傅利葉級數式展開式 。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi} \cos[2\pi(2k+1) f_0 t] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos(2\pi f_0 t) - \frac{1}{3}\cos(6\pi f_0 t) + \frac{1}{5}\cos(10\pi f_0 t) - \frac{1}{7}\cos(14\pi f_0 t) + \cdots \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

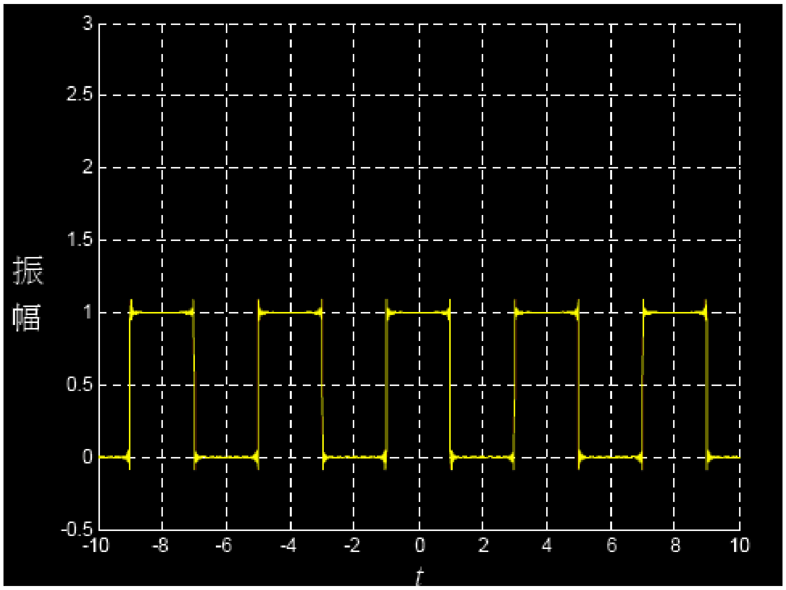
檢視此表示式可知此方波包含有無限多個頻率成份，其中直流成份為 1/2。以 $T_0 = 4$ 為例，圖 (a)顯示計算(1.10)式前 3 項得到的一個近似此週期方波之波形(包含至 3 次諧波)，若包含至 $15 f_0$ 頻率成份的波形如圖 7 (b)所示，如此持續包含更多高次諧波項，可得到一個越來越接近圖 6 所示之方波週期信號 $x(t)$，例如圖 7 (c) 顯示包含至 $101 f_0$ 頻率成份的波形，已非常近似此方波週期信號。此訊號之頻譜如圖 8 所示。



(a)　包含至 $3 f_0$ 頻率成份的波形

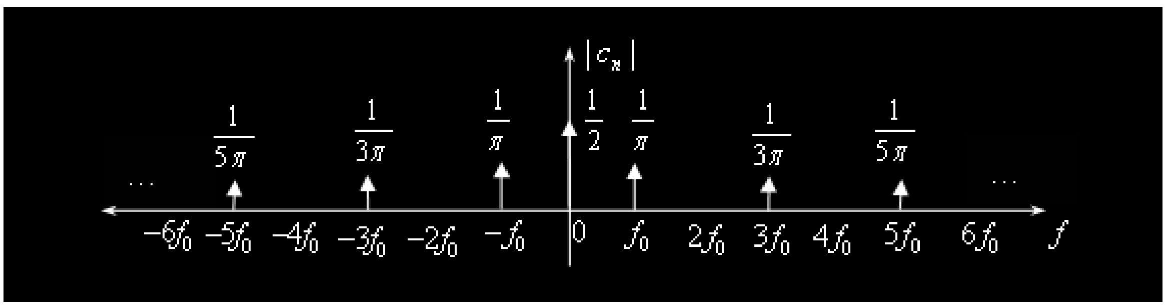


(b)　包含至 $15 f_0$ 頻率成份的波形

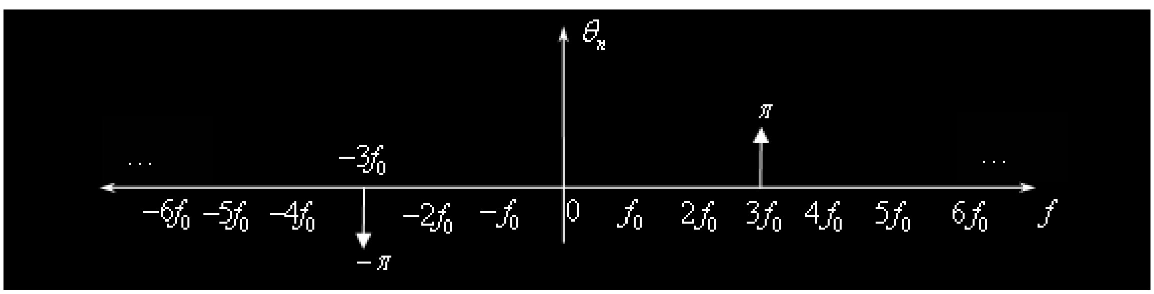


（c）　包含至$101f_0$頻率成份的波形

圖 7 一方波週期信號$x(t)$之傅利葉級數分析



（a）振幅頻譜



（b）相位頻譜

圖 8 範例之方波週期信號$x(t)$之頻譜

1.3 實習方法與步驟

1.3.1 週期方波分析與模擬

週期方波的工作週期分別設定為 90%和 10%，重做週期方波的傅利葉級數解析模擬，分別在時域與頻域觀察與討論其模擬結果 。

Step 1：建立模擬系統。

I. 開啟 MATLAB\Simulink Browser。

II. 開新檔案。

III. 將模塊連結成模擬系統，如圖 9 所示。

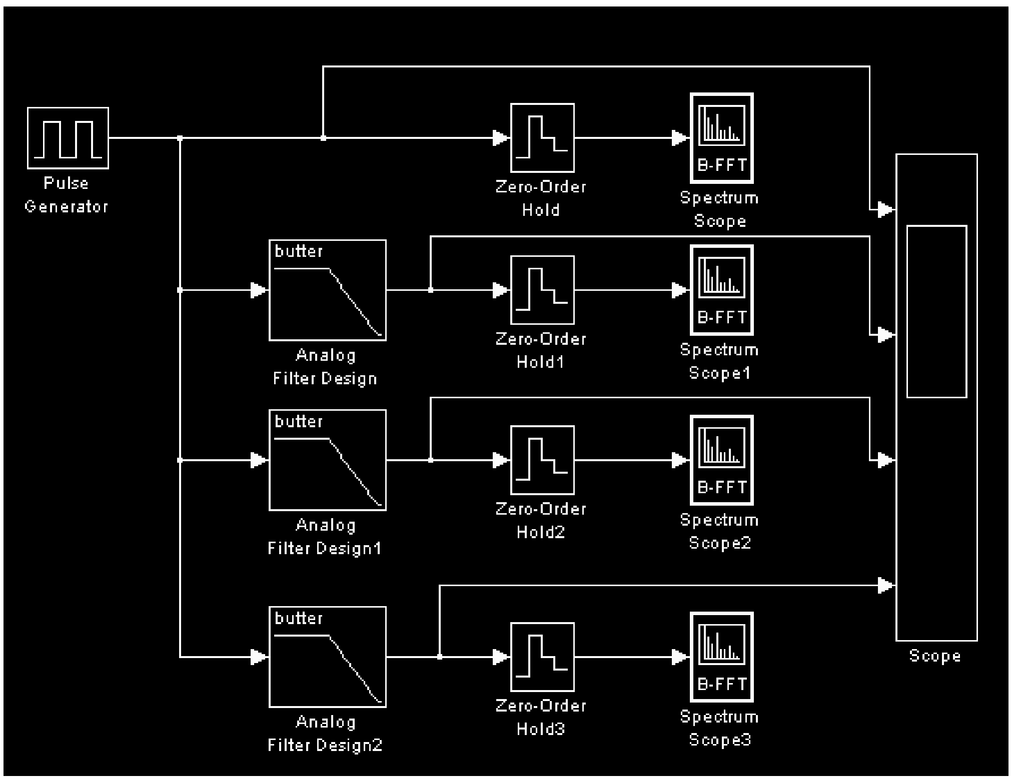


圖 9 週期方波模塊連結系統

Step 2：設定信號參數

I. 方波訊號振幅設定為 1（V），週期設定為 1/1000（Sec），脈波寬度分別設定為 90（%）、10（%），如圖 10、圖 11 所示，其餘皆用預設值。

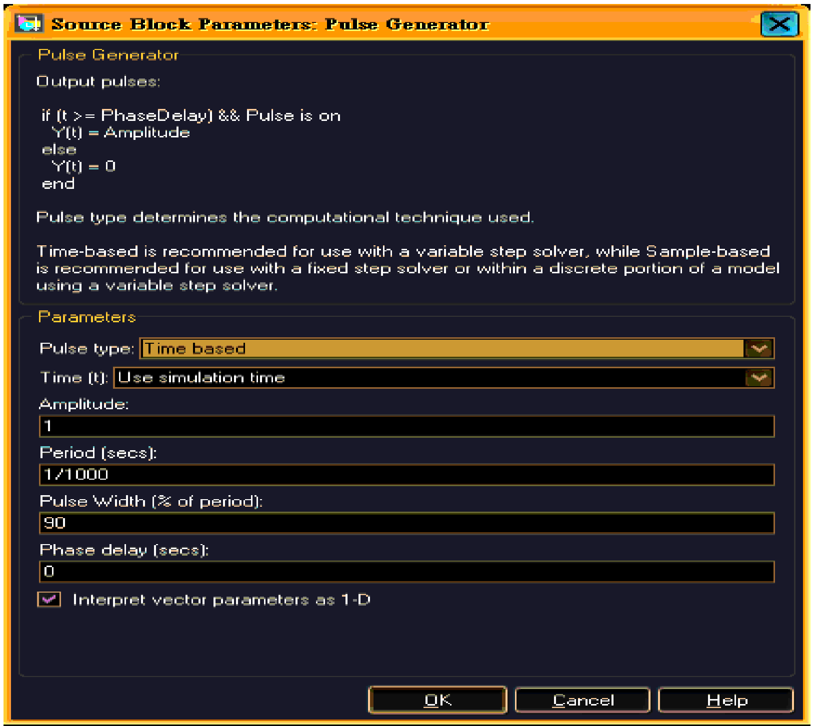


圖 10 方波(90%)的參數設定

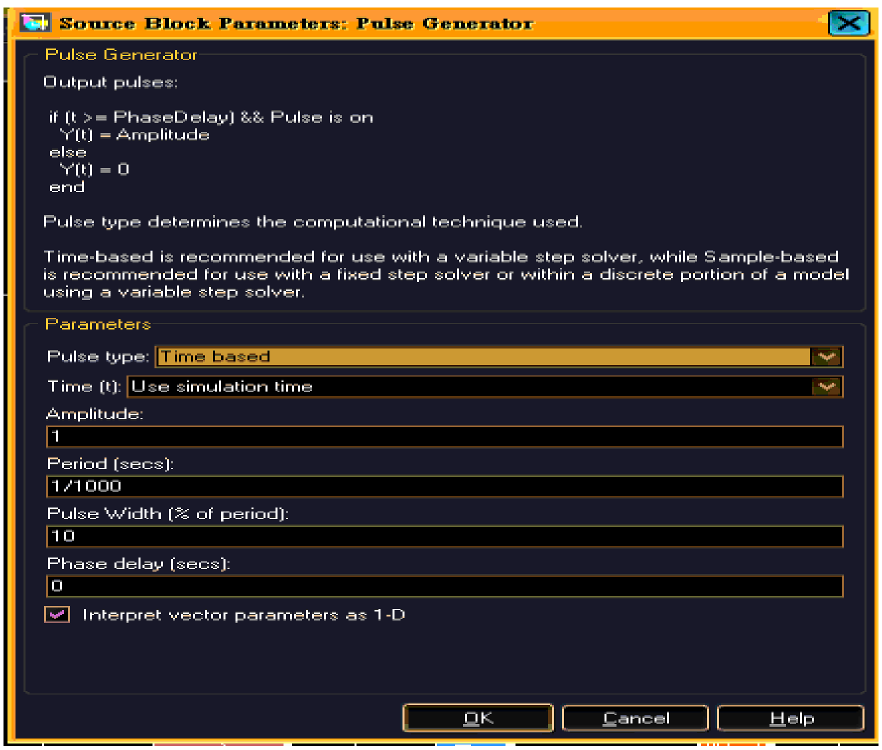


圖 11 方波(10%)的參數設定

Step 3：模擬環境設定、存檔與執行模擬

I. 濾波器設定皆為 Butterworth Low-pass，階數為 16，截止頻率分別為 2*pi*1100、2*pi*3100、2*pi*7100。

II. Zero-Order Hold 取樣時間(Sample time)設定為 1/20000，模擬時間設定為 0.01。

III. 示波器參數 Number of axes 設定為 4。

IV. Spectrum Scope 參數設定，其中圖 12 為 Scope Properties 設定；圖 13 為 Axis Properties 設定。

V. 執行時間設定為 0.01。

VI. 存檔後並執行模擬。

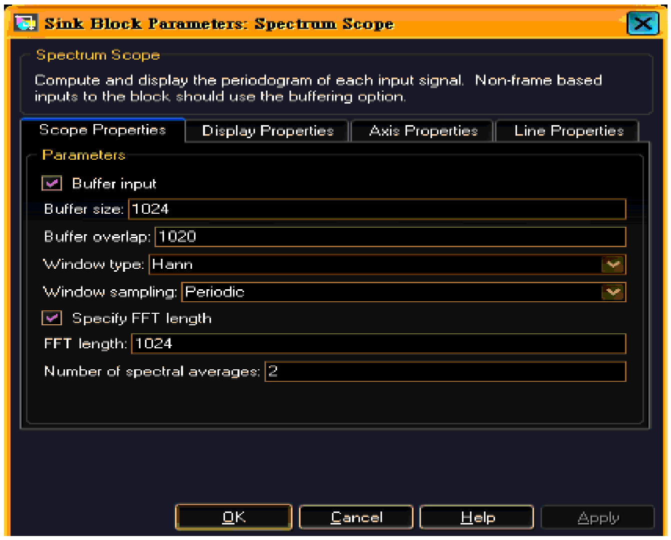


圖 12 Scope Properties 之參數設定

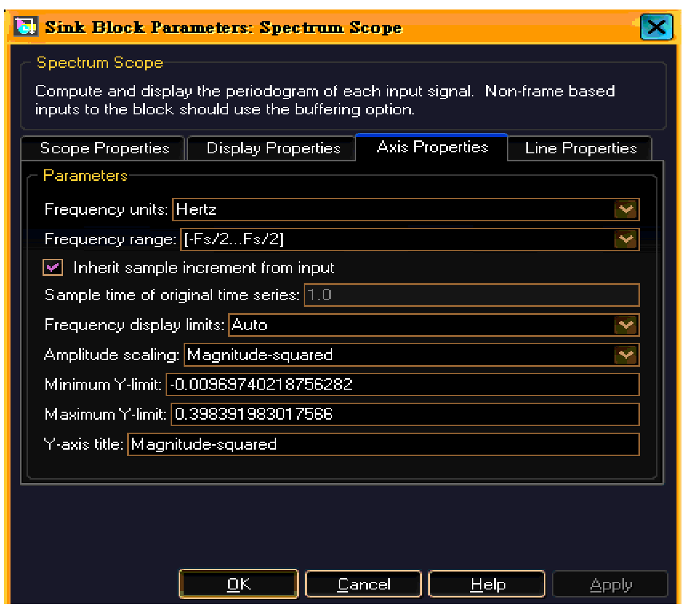


圖 13 Axis Properties 之參數設定

Step 4：進行模擬與結果分析

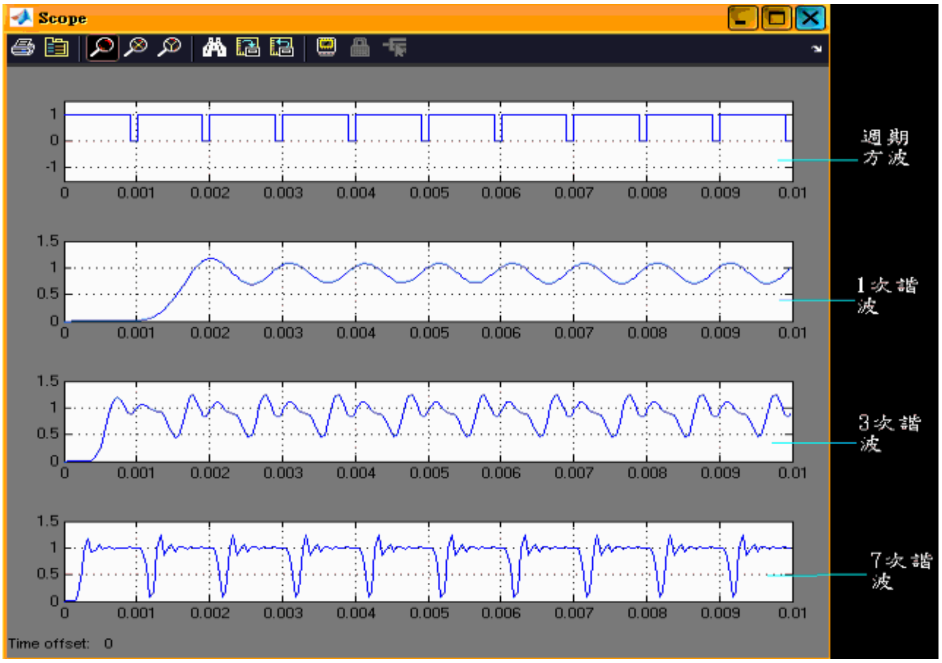


圖 14 觀察方波(90%)之時域變化

圖 15 觀察方波(10%)之時域變化

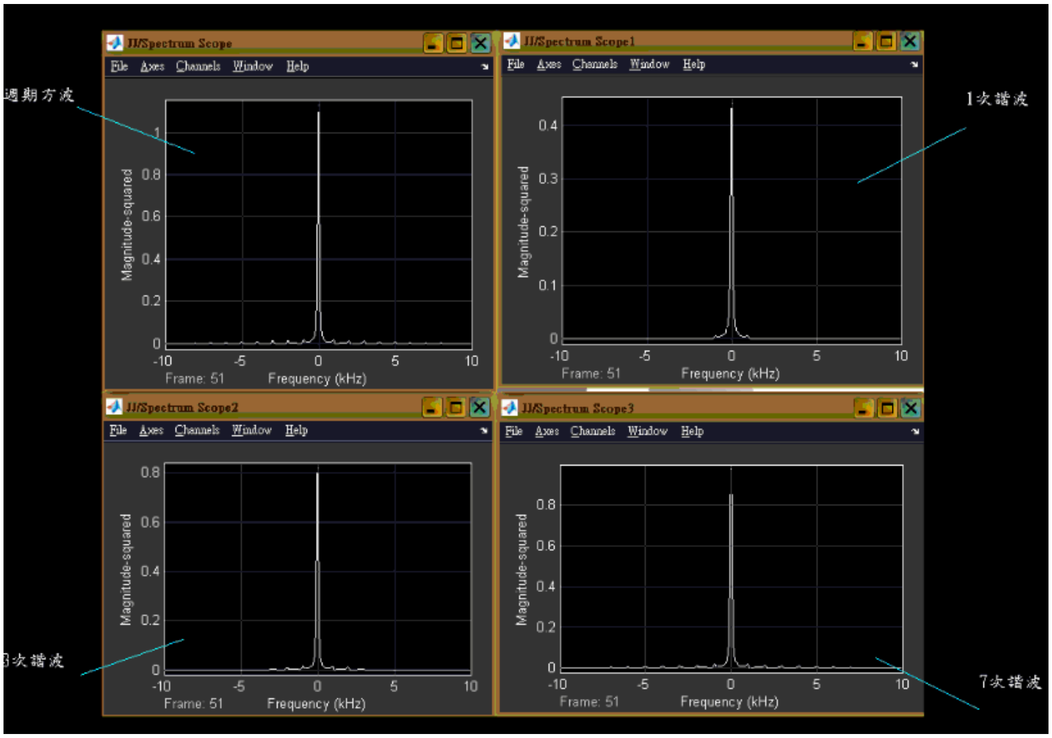


圖 16 觀察方波(90%)之頻域變化

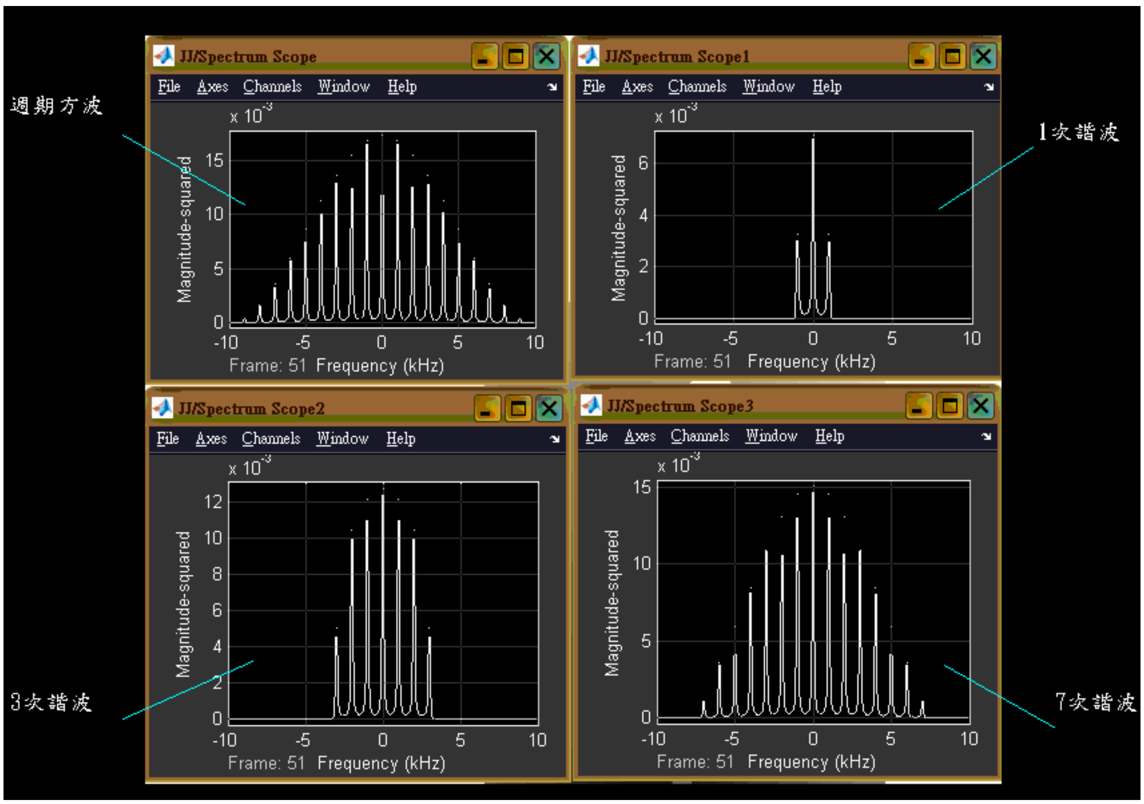
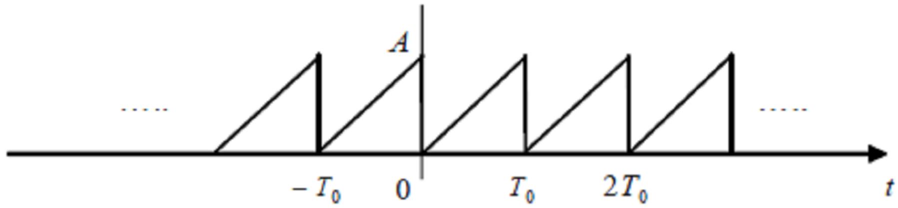


圖 17 觀察方波(10%)之頻域變化

1.3.2 週期三角波分析與模擬(僅將訊號由方波更換成三角波而已)

給定一週期三角波訊號 $x(t)$ 之時域波形，其週期為 T_0（基本頻率為 f_0）。



1. 求其三角傅利葉級數表示式。

$$x(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{2}{(2k+1)\pi}\cos\left[2\pi(2k+1)f_0 t\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos(2\pi f_0 t)-\frac{1}{3}\cos(6\pi f_0 t)+\frac{1}{5}\cos(10\pi f_0 t)-\frac{1}{7}\cos(14\pi f_0 t)+\cdots\right]$$

2. 以 A = 2， f_0 = 1k Hz 為例，重做前述週期方波之模擬。其時域及頻域分別為圖 22、圖 23 所示。

Step 1：建立模擬系統

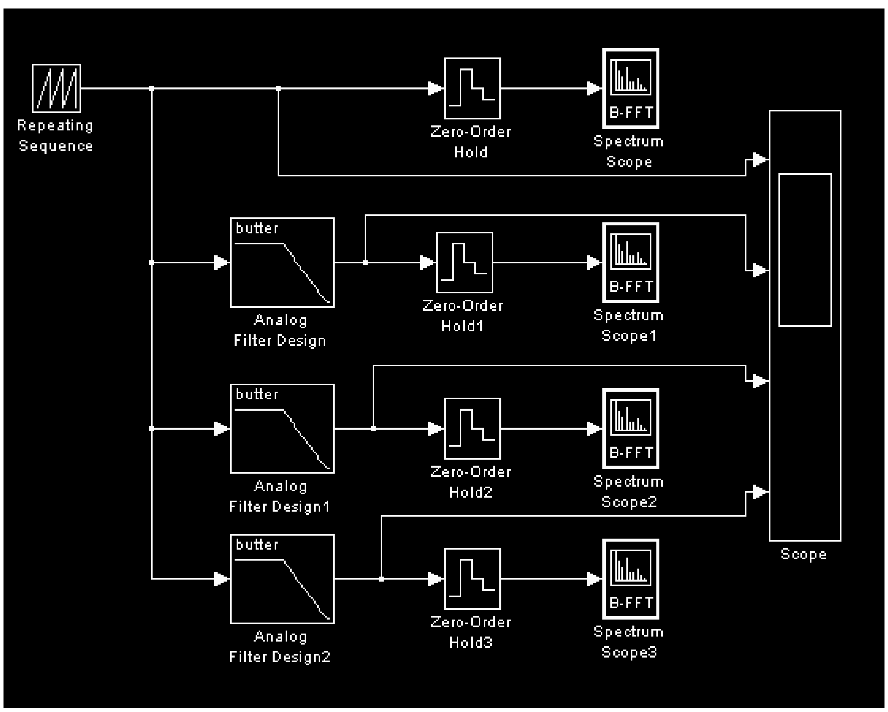


圖 18 週期三角波模塊連結系統

Step 2：設定信號參數

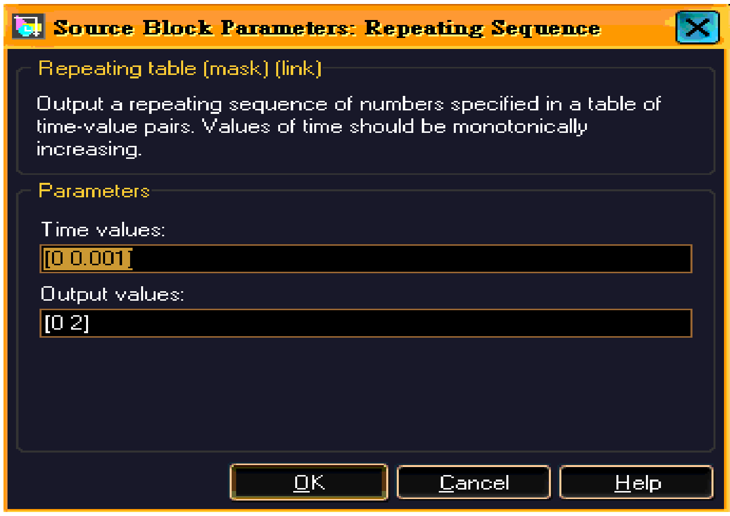


圖 19 週期三角波之參數設定

Step 3：模擬環境設定、存檔與執行模擬

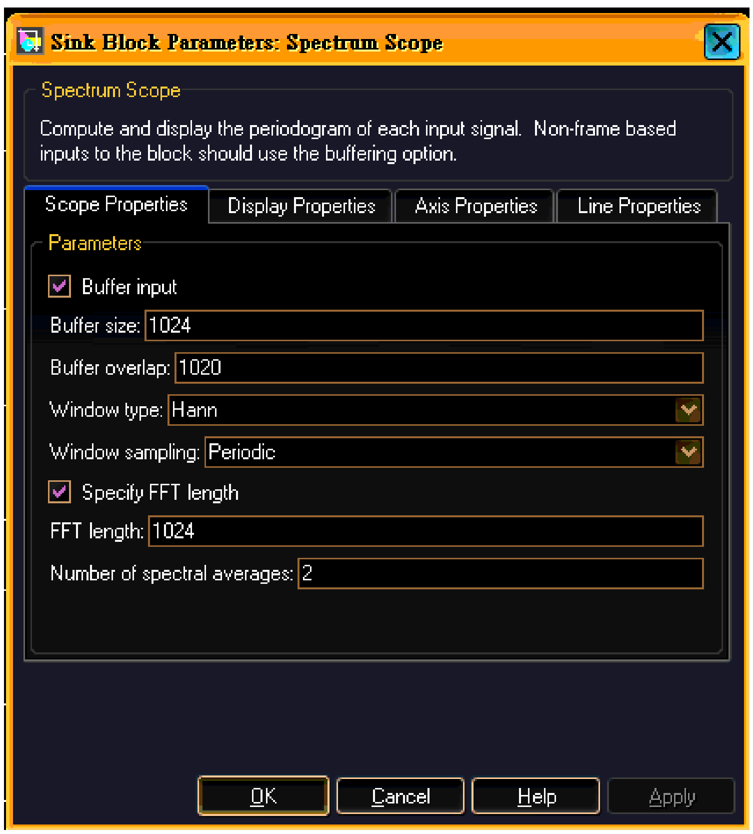


圖 20 Scope Properties 之設定

圖 21 Axis Properties 之設定

Step 4：進行模擬與結果分析

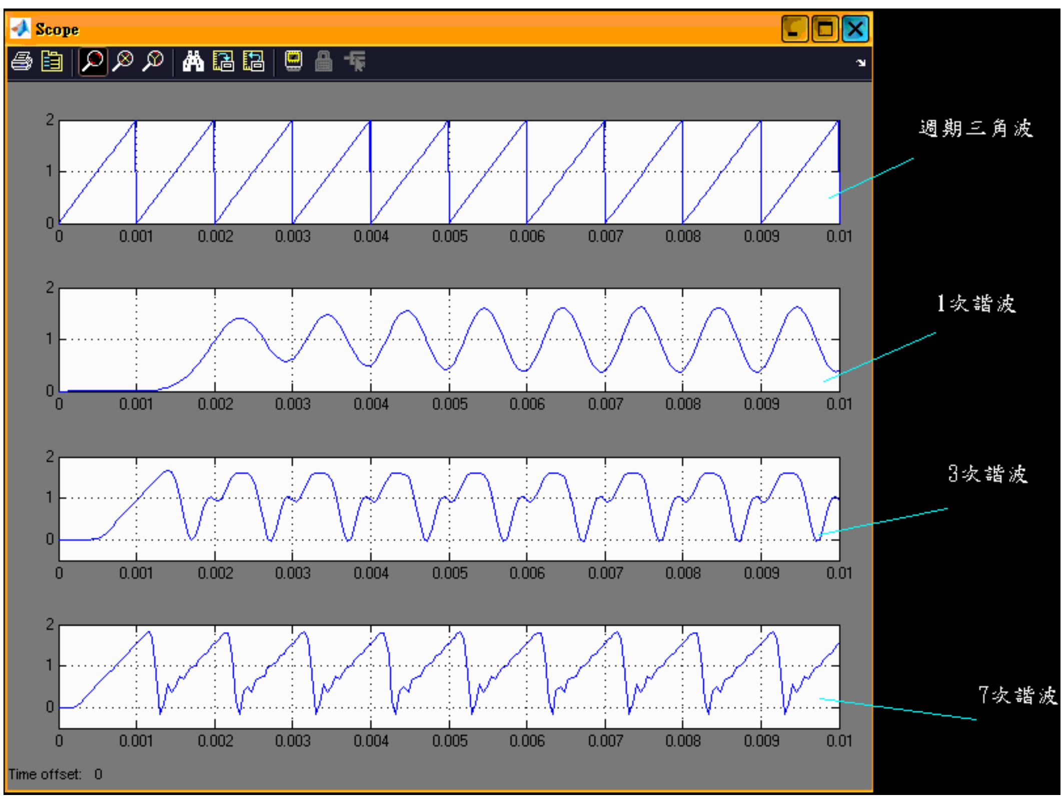


圖 22 觀察其時域變化

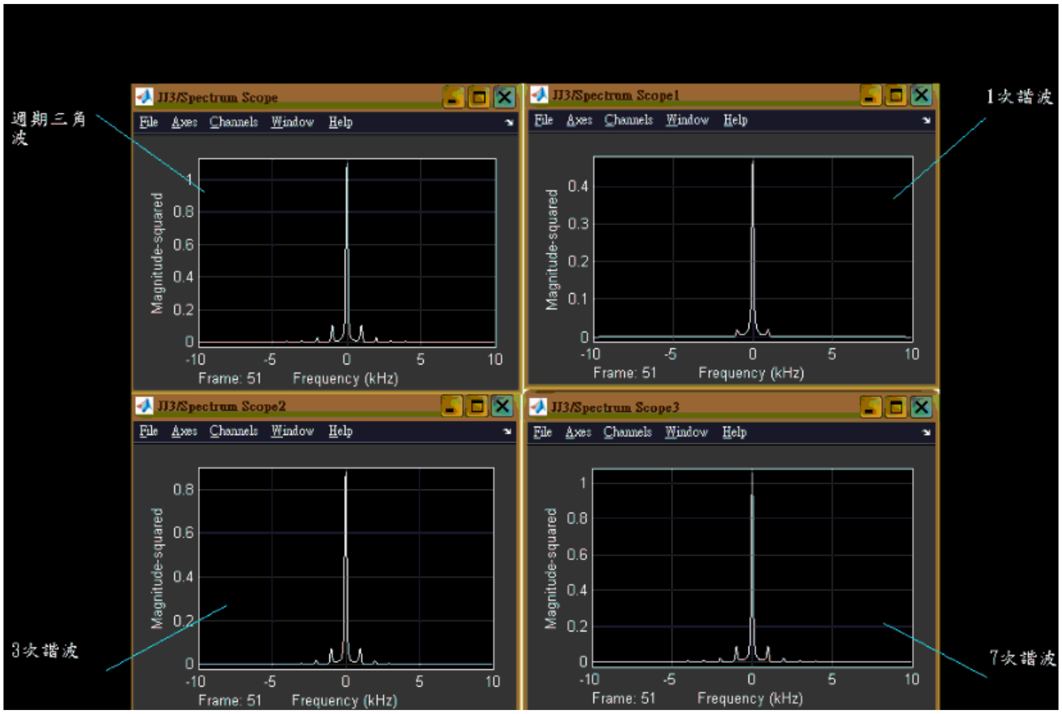


圖 23 觀察其頻域之變化

1.4 結果與討論

透過本實習可以充分了解方波之時域與頻域特性，同時分析與模擬週期信號的傅利葉級數，可學到週期信號在時域與頻域的特性。

參考文獻

L. Couch, Digital and Analog Communication Systems, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

S. Haykin, Communication System, John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1994.

余兆棠、文成康、林瑞源、張郁斌、林福林 編著，無線通訊與網路，滄海，2006 年 11 月。

余兆棠、李志鵬 著，信號與系統，滄海，2007 年 1 月。