可控制前置時間下允許欠撥折扣之整合性存貨模式

Integrated Inventory Models For Lead Time And Backorder Discount

楊金山 南台科技大學工業管理研究所副教授

黃祥銘 南台科技大學工業管理研究所

摘　　要

在傳統有關整合性存貨模式文獻中，較少考慮到產品的品質問題，通常假設賣方所生產的均為良品。但在實際的情況中，皆會有不良品的產生，若未經檢驗而將不良品交給消費者，則會引起顧客抱怨對企業的影響甚鉅。因此，本研究以修復的方式來處理不良品，就成本而言，會有修復成本的產生。當賣方發生缺貨時，買方允許賣方全數欠撥，並且賣方提供缺貨欠撥的折扣，在允許缺貨欠撥的情況下，考慮前置時間與運送批量間的關係，建構出一個以運送數量、運送次數、前置時間以及缺貨欠撥折扣為決策變數的整合性存貨模式。利用最佳化的原理，各自建立演算法並以數值範例加以說明驗證，求出最適解。

關鍵詞：欠撥折扣、不良品修復、整合性存貨

Yang Jin-Shan, Associate Professor, Gradate Program of Industrial Management, Southern Taiwan University
Huang Xiang-Ming, Gradate of Industrial Management, Southern Taiwan University

Abstract

The traditional literatures which related to Integrated Inventory Model were less to concern the problems of products' quality and usually assumed that all the products produced by sellers have perfect qualities. However, there are always some incomplete and defective items occurred in real situation. It will decrease consumer satisfaction and have a great effect upon the future of entrepreneur if sellers do not examine the products before selling to buyers. Therefore, this research will use the method of rework to cope with defective items. There may cause some cost by repair. When buyers allowed sellers to all backorder, there will be a shortage to seller, and consider the relationship between leading time and delivery lot size under the situation. Not only did the seller provide backordering discount, but also the buyers allowed backordering in chapter 4. Using the optimal theorem to form an algorithm individually and proved by the computational example to find out the most appropriate solution.

Keyword: backorder discount, defective items rework, integrated inventory models

一、前　言

面臨經貿全球化的趨勢，企業競爭已經由以往的區域性提升到全球性，為了促使企業更具競爭優勢，訂立良好的經營策略，才能確保企業永久性的發展，並且保持良好的獲利能力。供應鏈中，從供應商、製造商到零售商皆需要面對存貨該如何管理的問題，過多或不足的存貨，對企業來說都是一種損失。因此存貨管理的優劣攸關企業的整體發展以及獲利能力。制定一套完善的存貨管理策略對企業來說是一項重要課題。

單方面思考如何降低成本，提高自身的獲利，是無法達到整體成本最佳化及應付快速變遷的市場，現在的競爭環境已不再能允許大家只做單方面的考慮，若以站在整個供應鏈為出發點來作思考，透過雙方合作方式，整合、協調出對雙方皆有利的共同聯合成本，這樣才能保有買賣雙方長期的利益，進而達到降低雙方所產生的總成本。

關於品質方面，Liao 與 Shyu [10]、Ben-Daya 與 Raouf [5]、Ouyang et al. [14]皆未考慮到品質的問題，皆將供應商所生產的產品假設為良品，並且不會有不良品的情況發生。不過這與實際上的情況大相逕庭，不論是採用再好的機器，聘請再優良的員工，在生產過程中，機器還是會有突然故障的情況、原料品質的不佳、員工操控不當或者在運送過程中的疏失等諸多因素，而產生了不符合顧客要求的不良品，它必須修復、報廢或者重新加工。本研究採用不良品修復的方式來處理這些不良品，並將不良品的修復時間與修復成本列入本研究的探討範圍。

面對需求多變的市場環境下，缺貨是無可避免的現象。蕭裕正[1]指出:當因缺貨而需較長時間的等待時，有些顧客將會轉向其他廠商來訂購；這時，該廠商便會失去該筆訂單。Ouyang et al. [14]認為在缺貨發生的情況下，由於某些購買廠商對於某特定供應商的忠誠及信賴，所以該供應商發生缺貨時，購買的廠商仍願意等待缺貨的補足。為了提高購買者的等待意願，尚可提供欠撥折扣(backorder discounts)，以補償因等待造成的不便及損失。廠商可利用欠撥折扣吸引購買者接受欠撥，減少訂單流失並且降低因銷售損失造成的缺貨成本。如何適當的運用欠撥折扣，使存貨總成本最低，因此，本研究將欠撥折扣視為決策變數之一加以探討。

由於縮短前置時間(lead time)需額外付出趕工成本，這些成本不外乎付給員工加班費及薪資、使用較快的運輸方式之額外成本、生產設備更新的成本等等。倘若在一定的範圍之內，趕工成本能被接受，就能適度的調整前置時間，來提高服務的水準及增加企業的競爭力。本文研究重點之一即是探討在等批運送下，建構可控制前置時間的整合性存貨模式。

二、文獻探討

2-1 整合性存貨系統相關文獻

由於現今市場的競爭已從區域性發展為全球化，在面對更競爭的市場中，已不可再像過往只考慮以減少買方成本為方向，或降低賣方成本為目標，須透過買賣雙方密切的溝通合作，來建立一套同時考慮買賣雙方的存貨模式，使雙方皆能在良好的合作關係中透過策略的整合以達到雙贏目標及長期利益。整合買賣雙方存貨模式相關文獻方面可以追溯至1976年。Goyal [6]提出解決單一供應商與單一零售商問題的整合性存貨模型，若賣方已掌握買方的訂購數量與訂購週期時，賣方可以採取更佳的生產策略。當買方經成本函數決定出最適的訂購量與最佳訂購點時，再向賣方發出訂單，而賣方依據買方的購買資訊來決定最適的生產策略。

Banerjee [4]提出經濟批量(economic-lot-size,

ELS)的觀念，將批量大小視爲一決策變數。根據買賣雙方的成本函數，來計算出個別的最佳經濟批量，並將買賣雙方各自的經濟批量分別帶入對方的成本函數，並且比較成本差異以及產生的效果。Goyal [7]對Banerjee [4]的模型做修正，將賣方的生產批量定爲買方訂購量的整數倍，加入一個決策變數 N，來決定賣方一次生產的批量爲買方的經濟訂購批量的N 倍，其中N 爲正整數。全部產品生產量達到買方的經濟訂購批量時再分批運送給買方，聯合買賣雙方的成本，所得的總成本低於不分批運送時的總成本。

Ha 和 Kim [8]發展單一買方與單一賣方對單一產品的整合性存貨模式，並同時考慮JIT小批量觀念在買賣雙方立場時，假設買賣雙方的訂購批量與生產批量相等，將訂購批量在生產過程中分成m次運送給買方，將聯合總成本降到最低爲目標。Pan 和 Yang [16]提出在不允許缺貨情況下，採用等批量運送，在可控制前置時間情況考慮單一買方與單一賣方之整合性存貨模式，計算出最適前置時間、最適訂購數量與最適運送次數。

2-2 前置時間相關文獻

可控制前置時間的存貨模型是最近幾年所發展出來的。其文獻可追溯至 1982 年，Tersine [19]於其著作提出前置時間是由下列成份所組成：(Ⅰ)發出訂單前的準備時間(order preparation)、(Ⅱ)訂單遞送時間(order transit)、(Ⅲ)供應商的前置時間(supplier lead time)、(Ⅳ)運送時間(delivery time)及(Ⅴ)整備時間(setup time)等五個成份所組成;這些前置時間是可以藉由增加趕工成本來縮短，也就是說前置時間是可以控制的。

Liao 和 Shyu [10]提出以前置時間爲唯一決策變數的存貨模式，並且在模式中假設訂購數量爲已知。模式中前置時間內的作業由 n 個成分組成，每一種成分各有不同的正常作業時間(normal duration)，充分趕工下的作業時間(minimum duration)及單位時間的趕工成本(crashin cost)，並且假設前置時間內的趕工成本函數爲分段線性函數(piecewise linear function)，以求得最適前置時間。Ben-Daya 和 Raouf [5]延伸 Liao 和 Shyu [10]的模式，提出在不允許缺貨的情況下，前置時間與訂購數量爲決策變數的模型，求出全年期望總成本最小時之最適的訂購量與前置時間。

Ouyang 和 Chang [13]繼續延伸 Liao 和 Shyu [10]所推導之模式，認爲在實際問題當中，給付員工加班費及薪資、使用較快的運輸工具是縮短前置時間所多付出的額外成本、更新生產設備的成本等等。這些爲了縮短前置時間而增加的成本，部份與作業的次數有關，部份是與趕工數量有關;也就是說，這些成本可以分爲固定及變動的趕工成本。Lee、Wu 和 Lei [9]在前置時間需求量爲常態分配下，假設前置時間爲已知，考慮投資一筆資金來降低訂購成本的混合型存貨模式，建構一個決策變數爲訂購數量、訂購成本、欠撥折扣與前置時間的存貨模型，並利用其建立的演算法找尋出最適的存貨策略。

2-3 缺貨欠撥相關文獻

缺貨的問題在許多的存貨管理文獻上都曾被探討過。大部分的文獻都只討論到兩種情形，就是當缺貨發生時，缺貨期間的缺貨數量全數不補（即視爲銷售損失）或者是全數欠撥等兩種情形。Ouyang et al. [14]指出在有多個供應商的競爭下，由於購買者對某些特定供應商的忠誠及信賴，當該供應商有缺貨的現象發生時，購買者仍願意繼續等候。

Ouyang et al. [14]推廣Ben-Daya 與 Raouf [5]的模型，將訂購量與前置時間視爲決策變數，考慮發生缺貨現象時，缺貨數量允許部份欠撥、部份銷售損失的混合存貨模型。其全年期望總成本是由訂

購成本、存貨持有成本、缺貨成本與趕工成本組成，最後利用計量方法求出在全年期望總成本爲最小時，最適的訂購量與最適的前置時間。

Ouyang 和 Wu [12]則繼續延伸Ouyang et al. [14]所推導之存貨模型，在實際的問題中，關於前置時間內需求量機率分配的情報常常所知有限，因此不限制前置時間內需求量服從常態分配，在機率分配未知的情況下考慮需求率，僅知需求率的平均數與標準差，利用大中取小分配不拘的方式，對欠撥以及銷售損失混合的連續盤查存貨模型，找出最適訂購量與最適的前置時間。

蕭裕正[1]提出一個以前置時間、訂購量與欠撥折扣爲決策變數的存貨模型，趕工同時考慮變動成本與固定成本。當缺貨現象發生時，缺貨數量允許部份欠撥、部份銷售損失的混合存貨模型，並且以計量方法推導出使期望總成本爲最小時的最適前置時間、欠撥折扣與最適訂購量。Lin [11]繼續延伸蕭裕正[1]的存貨模型，假設前置時間爲可控制，探討前置時間的縮短與訂購成本兩者之間具有的相依關係，並且以訂購量、再訂購點、欠撥折扣以及前置時間爲決策變數，找尋出最佳的存貨策略。

2-4 考慮不良品與不良品修復相關文獻

在較早的 EOQ 模式中，常假設生產過程中無不良品的產生，所生產的皆爲良品，這與現實生活中背道而馳。Schwaller [18]對於傳統經濟訂購批量有不一樣的看法，以傳統 EOQ 爲架構，假設每批量產品中的不良品率及檢驗成本均爲固定的，並且建立存貨模型，其中檢驗成本包含每單位的固定檢驗成本及每批量的固定檢驗成本兩種。

Paknejad et al. [15]提出隨機需求與固定前置時間且送達批量含有不良品的存貨模式，他們將不良率設爲一隨機變數，並且假設買方採取全面檢驗的方法。在賣方每一次等批量運送的情況下，買方檢驗所有的訂購產品，並將檢驗後發現的不良品保留，在下次進貨時退回給賣方。Salameh 和 Jaber [17]假設在品質不完美的情況下產品的接收與生產問題，產品在全數 100%完全檢驗下，辨別出良品與不良品，並且在不良品達到一定的數量後再以折扣價格轉售，這兩位學者發現在不良品增加時，經濟訂購批量也會隨之增加而增加。

Wu 與 Ouyang [13]認爲每次新訂購的產品可能會包含部份的不良品，不良品的數量爲一個隨機變數。他們建構一個混合的存貨模型，考慮允許缺貨欠撥及銷售損失，決策變數爲訂購數量、訂購點、與前置時間，在假設前置時間的需求符合常態分配的條件以及所有相關總成本最小化下，找尋出最適訂購數量、最適訂購點及最適的前置時間。Abdullah [3]延伸 Salameh 與 Jaber [17]的模式，針對訂購批量中含不良品且允許缺貨、不良品皆可被檢驗出來，不合格的不良品將與良品分開銷售，並探討不良率對最適生產批量有何影響。蘇佑廷[2]探討不良品修復的情況下對運送次數以及最適訂購量的影響。當賣方在產品中發現不良品時，將其與良品區分開，當不良品達到一定的數量時，將全部的不良品交送買方並且一次修復完畢。

三、模式建立

3-1 基本假設

1.每一次的生產數量爲 mQ，共須運送 m 次給買方，m 爲正整數，每次運送量爲 Q。

2.不良率爲固定已知常數。

3.不良品在修復的過程中爲完全修復。

4.允許缺貨。

5.資金沒有限制。

6.瑕疵品緩衝容量與原料倉儲不受限制。

7.運途中沒有不良品產生。

8.前置時間內的需求量 X 需服從常態分配，平均

數爲 DL，標準差爲 $\sigma\sqrt{L}$ 。

9.若允許縮短前置時間，賣方因額外趕工所增加的成本將完全轉嫁給買方。

10.前置時間內作業可分爲 n 個相互獨立的成份組成，以單位時間趕工成本爲最 低的優先趕工，接著考慮單位時間趕工成本次低的，依此類推。

11.賣方生產率大於買方需求率。

12.訂購週期內容許發生的缺貨機率 q 爲 0.2，因此可由標準常態分配表查得安全因子 ρ 爲 0.845。

13.欠撥比例 β_0 皆假設爲 1。

3-2 符號定義

本研究所使用的符號說明如下：

P	賣方年生產量
D	買方年需求量
λ	賣方每年的不良品數
q	買方每一次的運送數量(決策變數)
Q	買方每一次的訂購量
λ/P	年不良率
P_1	不良品的年修復速率
S	每次賣方的設置成本
A	每次買方的訂購成本
R	每年每件的持有成本
C_v	賣方每單位的生產成本
C_b	買方每單位的訂購成本
C_R	賣方每件不良品的修復成本
C	買方的趕工成本
F	每一次的運送成本
m	每一次生產批量的交貨次數(決策變數)
h_b	買方每年每件產品的持有成本 ($h_b = RC_b$)
h_v	賣方每年每件產品的持有成本 ($h_v = RC_v$)
L	前置時間的長度（決策變數）
L_0	原始的前置時間長度，即不趕工情況下之前置時間長度
π_x	缺貨時，賣方提供之每單位貨品的欠撥折扣（決策變數）
π	每單位貨品缺貨的懲罰成本
π_0	每單位貨品的邊際利潤
r	再訂購點
q^*	訂購週期內容許發生缺貨的機率
X	前置時間內的需求量
K	存貨的安全因子
ai	前置時間組成成分 i 的充分趕工下的作業時間
bi	前置時間組成成分 i 的正常作業時間
ci	前置時間組成成分 i 的單位趕工成本
TC_b	買方的全年總成本
TC_v	賣方的全年總成本
JTC	爲整合賣方與買方之後雙方聯合全年總成本

3-3 基本模式建立

本研究在賣方的生產批量中含不良品，並且將不良品重製修復，當賣方發生缺貨時，買方允許賣方全數欠撥，並且賣方提供缺貨欠撥的折扣，在允許缺貨欠撥的情況下，考慮欠撥折扣與運送批量間的關係，建構出一個以運送數量、運送次數、前置時間以及欠撥折扣爲決策變數的整合性存貨模式，最後例題以 Banerjee [4]、Ouyang et al. [14]的部份參數來說明此模式的求解過程。

本研究在買方總成本方面建構了訂購成本、運輸成本、缺貨成本、持有成本以及趕工成本，賣方則分別爲設置成本、修復成本以及持有成本，決策變數爲 m(每一次生產批量的交貨次數)和 q(買方每一次的運送數量)， π_x (欠撥折扣)以及 L(前置時間)，並加以探討欠撥折扣與前置時間兩決策變數對於在有不良品修復的狀態之下，有何影響。賣方可以提供的最高欠撥折扣爲它的邊際利潤，因此 $\pi_x \le \pi_0$ 。

首先建立買方的存貨模型，買方全年總成本式子如下：

$TC_b(m,q,\pi_x,L)$ =訂購成本+運輸成本+缺貨成本+趕工成本+持有成本

1.全年的訂購成本(annual ordering cost)

訂購的成本爲 A，買方每次的訂購數量爲 mq，一整年的需求量爲 D，因此全年的訂購成本式子如下：

$$\frac{D}{mq}A \tag{1}$$

2.全年的運輸成本(annual transport cost)

每次運送的成本爲 F，買方每次運送的數量爲 Q，一整年的需求量爲 D，因此全年的運送成本爲

$$\frac{D}{q}F \tag{2}$$

3.全年的缺貨成本(annual shortage cost)

前置時間內的需求量 X 服從常態分配，平均數爲 μL，標準差爲 $\sigma\sqrt{L}$，當前置時間內的需求量 X 小於再訂購點 r 時，不會有缺貨的情況產生，反之，當 X 超越再訂購點 r 時則會產生缺貨的情況，其缺貨的數量爲(x-r)。以 $B(r)$表示期望的缺貨數量，則 $B(r)=\int_r^\infty (x-r)f(x)dx=\sigma\sqrt{L}\psi(k)$，且 $\psi(k)=\phi(k)-k[1-\Phi(k)]$，其中 ϕ 和 Φ 分別爲標準常態分配之機率密度函數(probability density function)與分配函數(cumulative distribution function)(Ouyang,1996)，由於每個週期的期望欠撥數量爲 $\beta B(r)$，所以每個週期的欠撥折扣成本爲 $\pi_x\beta B(r)$；期望銷售損失爲 $(1-\beta)B(r)$，則每個週期因缺貨所造成損失的利潤爲 $\pi_0(1-\beta)B(r)$。缺貨允許全部欠撥，全年需求爲 D，每單位貨品的邊際利潤爲 π_0，缺貨時，賣方所提供每單位貨品的欠撥折扣爲 π_x，因此全年的缺貨期望成本可表示成下列式子：

$$\frac{D}{q}[\pi_x\beta+\pi_0(1-\beta)]\sigma\sqrt{L}\psi(k)$$

$$=\frac{D}{q}\left[\frac{\beta_0}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\beta_0\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)$$

因假設爲全數欠撥 β_0=1，所以式子可表示如下：

$$\frac{D}{q}\left[\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k) \tag{3}$$

4.全年的趕工成本(annual lead time crashing cost)

由於前置時間內的作業可區分爲 n 個相互獨立的作業，定義 L_i 爲前置時間組成成分中的成分 1 至成份 i 皆充分趕工下的前置時間長度，因此 L_i 可表示爲：

$$L_i=L_0-\sum_{j=1}^{i}(b_j-a_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{i}(b_j-a_j) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

L_0 定義爲組成成分都不趕工的前置時間，則 $L_0=\sum_{i=1}^{n}b_j$。在一已知的前置時間 $L\in[L_i,L_{i-1}]$ 中，每一週期的趕工成本爲 $C_i(L)=C_i(L_{i-1}-L)+\sum_{j=1}^{i-1}C_j(b_j-a_j)$ (Liao 與 Shyu，1991)，又因全年的總訂購次數爲 D/q，故全年的趕工成本可表示成下列式子：

$$\frac{D}{q}C_i(L) \tag{4}$$

5.全年的持有成本(annual holding cost)

當需求量 X 大於再訂購點 r 時，則產生缺貨，若缺貨允許的欠撥比例爲 $\beta(\beta=\beta_0\pi_x/\pi_0)$，則每個週期的期望欠撥數量爲 $\beta B(r)$，而期望的銷售損失爲 $(1-\beta)B(r)$。每一個週期期末的期望存貨水準可表示爲 $E(r-X)+(1-\beta)B(r)$，每次

收到的產品數量爲 q，因此每一個週期期初的期望存貨水準可表示爲

$q+E(r-X)+(1-\beta)B(r)$。而一個週期的平均存貨持有數爲：

$$\frac{q}{2}+E(r-X)+(1-\beta)B(r)=\frac{q}{2}+r-\mu L+(1-\beta)\sigma\sqrt{L}\psi(k)$$

由於 $r=\mu L+k\sigma\sqrt{L}$，所以可將上式簡化爲

$q/2+k\sigma\sqrt{L}+(1-\beta)\sigma\sqrt{L}\psi(k)$。產品每年每件的持有成本爲 h_b，因此買方全年的持有成本可表示爲下列式子：

$$h_b\left[\frac{q}{2}+k\sigma\sqrt{L}+\left(1-\frac{\beta_0}{\pi_0}\pi_x\right)\sigma\sqrt{L}\psi(k)\right]$$

因假設爲全數欠撥 β_0=1，所以式子可表示如下：

$$h_b\left[\frac{q}{2}+k\sigma\sqrt{L}+\left(1-\frac{\pi_x}{\pi_0}\right)\sigma\sqrt{L}\psi(k)\right] \quad (5)$$

買方的全年總成本即爲全年的訂購成本(1)、全年的運輸成本(2)、全年的缺貨成本(3)、全年的趕工成本(4)以及全年的持有成本(5)之和，所以將上述的五種成本相加，便可得到買方的全年總成本如下：

$$\begin{aligned}&TC_b(q,\pi_x,L,m)\\&=\frac{D}{mq}A+\frac{D}{q}F+\frac{D}{q}\left[\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)+\frac{D}{q}C_i(L)\\&+h_b\left[\frac{q}{2}+k\sigma\sqrt{L}+\left(1-\frac{1}{\pi_0}\pi_x\right)\sigma\sqrt{L}\psi(k)\right]\end{aligned}$$

$$L\in[L_i,L_{i-1}],i=1,2,...,n \quad (6)$$

6.全年的設置成本(annual setup cost)

賣方的全年總成本爲設置成本、修復成本及持有成本之和，各成本的計算如下：

賣方每一次生產週期產品生產的數量爲 mq，每一次的設置成本爲 S，因此全年的設置成本爲

$$\frac{D}{mq}S \quad (7)$$

7.全年的修復成本(annual repair cost)

賣方每一次生產週期的產量爲 mq，每一件不良品的修復成本爲 C_R，每一生產週期不良品的數量爲 $\lambda mq/P$，因此全年的修復成本爲

$$\frac{\lambda mq}{P}C_R \quad (8)$$

8.全年的持有成本(annual holding cost)

針對蘇佑廷（2007）所推導，賣方每一次的運送數量爲 q，每次生產的產品數量爲 mq，產品直到全部運送完畢爲止，因此，每一生產週期的持有數爲

$$\frac{q}{2}\left[\left(2-m-\frac{\lambda m}{P}-\frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P}+m-1\right] \quad (9)$$

產品每年每件的持有成本爲 hv，所以全年的持有成本爲

$$h_v\times\frac{q}{2}\left[\left(2-m-\frac{\lambda m}{P^2}-\frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P}+m-1\right] \quad (10)$$

賣方的全年總成本即爲設置成本(7)、修復成本(8)及持有成本(10)之和，所以將上述的三種成本相加，便可得到賣方的全年總成本如下：

$$TC_v(q,\pi_x,L,m)$$
$$=\frac{D}{mq}S+\frac{\lambda mq}{P}C_R+$$
$$h_v\times\frac{q}{2}\left[\left(2-m-\frac{\lambda m}{P^2}-\frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P}+m-1\right]$$

(11)

將買方全年總成本(6)與賣方全年總成本(11)兩式子相加，便可求得買賣雙方的聯合總成本(12)與(13)，如下所示：

$$JTC_i(q,\pi_x,L,m)=$$
$$\frac{D}{q}\left\{\frac{A+S}{m}+F+\left[\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)+C_i(L)\right\}+.$$
$$h_b\left[\frac{q}{2}+k\sigma\sqrt{L}+\left(1-\frac{1}{\pi_0}\pi_x\right)\sigma\sqrt{L}\psi(K)\right]+\frac{\lambda mq}{P}C_R+h_v\times$$
$$\frac{q}{2}\left[\left(2-m-\frac{\lambda m}{P^2}-\frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P}+m-1\right]$$
$$L\in[L_i,L_{i-1}]\text{ , } i=1,2,...,n$$

(12)

經整理可得公式(13)：

$$JTC_i(q,\pi_x,L,m)=$$
$$\frac{D}{q}\left\{\frac{A+S}{m}+F+\left[\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)+C_i(L)\right\}+$$
$$\frac{\lambda mq}{P}C_R+\frac{q}{2}\left\{h_b+h_v\left[\left(2-m-\frac{\lambda m}{P^2}-\frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P}+m-1\right]\right\}$$
$$+h_b\left[k\sigma\sqrt{L}+\left(\frac{1}{\pi_0}\pi_x\right)\sigma\sqrt{L}\psi(k)\right]$$
$$L\in[L_i,L_{i-1}]\text{ , } i=1,2,...,n$$

(13)

為求取最適解，我們給定運送次數 m，並將買賣雙方全年的聯合總成本 $JTC(q,\pi_x,L,m)$ 分別對運送數量 q、欠撥折扣 π_x 與前置時間 L 做一階偏微分，便可得下列三式：

$$\frac{\partial JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q}=$$
$$-\frac{D}{q^2}\left\{\frac{A+S}{m}+F+\left[\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)+C_i(L)\right\}$$
$$+\frac{\lambda m}{P}C_R+\frac{1}{2}\left\{h_b+h_v\left[\left(2-m-\frac{\lambda m}{P^2}-\frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P}+m-1\right]\right\}$$

(14)

$$\frac{\partial JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial \pi_x}=$$
$$\frac{D}{q}\left[\frac{2}{\pi_0}\pi_x-1\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)-\frac{1}{\pi_0}h_b\sigma\sqrt{L}\psi(k)$$

(15)

$$\frac{\partial JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial L}=$$
$$\frac{D}{q}\left[\frac{\left(\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right)\sigma\psi(k)}{2\sqrt{L}}-C_i\right]+\frac{h_b k\sigma}{2\sqrt{L}}$$
$$+h_b\frac{\left(1-\frac{1}{\pi_0}\pi_x\right)\sigma\psi(k)}{2\sqrt{L}}$$

(16)

接著檢視二階充分條件(second order sufficient conditions)，發現 $JTC_i(q,\pi_x,L,m)$ 並非是 (q,π_x,L) 的凸函數。因此，對任意給定的運送量 q、欠撥折扣 π_x 與運送次數 m 來說，全年的聯合總成本 $JTC_i(q,\pi_x,L,m)$ 為 $L\in[L_i,L_{i-1}]$ 的凹函數，因為

$$\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial L^2}=$$
$$-\frac{D}{4q}\left(\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right)\sigma L^{\frac{-3}{2}}\psi(k)-\frac{1}{4}h_b L^{\frac{-3}{2}}k\sigma$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi_0}\pi_x\right)\sigma L^{\frac{-3}{2}}\psi(k)h_b<0$$

(17)

所以對任意給定的前置時間 $L \in [L_{i-1}, L_i]$，$i = 1,2,...,n$，其全年聯合總成本 $JTC_i(q, \pi_x, L, m)$ 的最小值必定發生在區間 $[L_i, L_{i-1}]$ 的端點上。此外，對於給定的運送次數 m 與前置時間 $L \in [L_{i-1}, L_i]$，$i = 1,2,...,n$，$JTC_i(q, \pi_x, L, m)$ 勢必爲 (q, π_x) 的凸函數（詳細證明請參閱附錄）。於 (15) 式中，令 $\partial JTC_i(q, \pi_x, L, m)/\partial \pi_x = 0$，即可求得欠撥折扣 π_x，整理可得下列式子：

$$\pi_{xi} = \frac{hq}{2D} + \frac{\pi_0}{2} \tag{18}$$

接著於 (14) 式中，令 $\partial JTC_i(q, \pi_x, L, m)/\partial q = 0$，即可求得運送數量 q，整理可得下列式子：

$$q_i = \sqrt{\left[\frac{P}{\lambda m C_R} + \frac{2}{\left\{h_b + h_v\left[\left(2 - m - \frac{\lambda m}{P^2} - \frac{\lambda^2 m}{PP_1}\right)\frac{D}{P} + m - 1\right]\right\}}\right]} \times \sqrt{\frac{m\pi_0}{D(A+S)\pi_0 + DFm\pi_0 + D\pi_x^2 m\sigma\sqrt{L}\psi(k) - D\pi_0^2 m\sigma\sqrt{L}\psi(k) - D\pi_x\pi_0 m\sigma\sqrt{L}\psi(k) + DC_i(L)m\pi_0}} \tag{19}$$

另一方面再對 $JTC_i(q, \pi_x, L, m)$ 的運送次數 m 做一階與二階的偏微分，可得下列式子：

$$\frac{\partial JTC_i(q, \pi_x, L, m)}{\partial m} = -\frac{D}{q}\left(\frac{A+S}{m^2}\right) + \frac{\lambda q}{P}C_R + \frac{h_v q}{2}\left(1 - \frac{D}{P} - \frac{\lambda D}{P^3} - \frac{\lambda^2 D}{P^2 P_1}\right) \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 JTC_i(q, \pi_x, L, m)}{\partial m^2} = \frac{2D}{q}\left(\frac{A+S}{m^3}\right) > 0 \tag{21}$$

從(21)式中，可以得知 $JTC_i(q, \pi_x, L, m)$ 爲運送次數 m 的凸函數，因此，運送次數 m 的局部最適解會是全域最適解。最後可以經由演算法來求出最適的運送數量 q、最適的欠撥折扣 π_x、最適的前置時間 L 與最適的運送次數 m。

演算法

步驟一 先假設 $m = 1$。

步驟二 對每一個前置時間 L_i，執行 A 到 E 的動作，$i = 0,1,2,...,n$

A 設定起始值 $\pi_{xi} = 150$ (賣方提供最高的欠撥折扣爲其邊際利潤 $0 \le \pi_x \le \pi_0$)。

B 將 π_{xi} 代入(4-15)式，求出 q_i。

C 利用求出的 q_i 代入(4-14)式，求出 π_{xi2}。

D 重複 B 至 C 的步驟，直到 q_i 與 π_{xi} 收斂爲止。

E 完成對應的 $JTC_i(q_i, \pi_{xi}, L_i, m)$。

步驟三 找尋 $\min_{i=0,1,2,...,n} JTC_i(q_i, \pi_{xi}, L_i, m)$ 當 $JTC_i(q^*_{(m)}, \pi^*_{x(m)}, L^*_{(m)}, m) = \min_{i=0,1,2,...,n} JTC_i(q_i, \pi_{xi}, L_i, m)$，則 $JTC_i(q^*_{(m)}, \pi^*_{x(m)}, L^*_{(m)}, m)$ 爲給定的 m 值最適解。

步驟四 $m = m + 1$，重複步驟二以及步驟三，求出其 $JTC_{i_{(m)}}(q^*_{(m)}, \pi^*_{x(m)}, L^*_{(m)}, m)$

步驟五 當 $JTC_{i_{(m-1)}}(q^*_{(m-1)}, \pi^*_{x(m-1)}, L^*_{(m-1)}, m-1) \ge JTC_{i_{(m)}}(q^*_{(m)}, \pi^*_{x(m)}, L^*_{(m)}, m)$ 時，重複步驟四，否則繼續步驟六。

步驟六 當 $q^* = q^*_{(m-1)}$、$\pi^*_x = \pi^*_{x_{(m-1)}}$、

$L^* = L^*_{(m-1)}$、$m^* = m^*_{(m-1)}$，則 $\left(q^*, \pi^*_x, L^*, m^*\right)$爲本模式的最適解，而 $JTC_{i_{(m)}}\left(q^*_{(m)}, \pi^*_{x_{(m)}}, L^*_{(m)}, m\right)$即爲此模式全年聯合總成本的最適解。

四、數值範例

有一存貨問題的相關資料列示如下：D=1000 件/年，P=3200 件/年，A=25 元/每次訂購，F=40 元/每次運送，S=400 元/每次設置，C_R=3 元/件，h_b=5 元/年件，h_v=4 元/年件，σ =7 件/週，π =10 元/件，$\pi_0 = 150$，λ =64 件/年，P_1=3200 件/年。前置時間內的作業由三個成分所組成。表 1 顯示每一個成分的正常作業時間 b_i 、充分趕工下的作業時間 a_i 與每一組成成分的單位時間趕工成本 c_i。在本例中假設訂購週期內容許發生缺貨的機率爲 0.2，因此可從標準常態分配表查得安全因子爲 0.845。

表 1 前置時間內各組成成分的相關資料

前置時間組成成分 i	正常作業時間 b_i (天)	充份趕工下作業時間 a_i (天)	單位時間趕工成本 c_i (\$/天)
1	20	6	0.1
2	20	6	1.2
3	16	9	5

以 EXCEL 軟體計算出買賣雙方的聯合總成本，在數量方面，小數點後一位無條件進入求一正整數值，在成本以及欠撥折扣方面取小數點後兩位四捨五入，來求取一近似值。

本例題運用上述的數值資料建構一個考慮欠撥折扣下與不良品修復的存貨模式，利用上述的演算法來求得最適解，根據表 4-2 可得知，最適的生產量 Q=430 件，最適的前置時間 L=4 週，最適的欠撥折扣金額 $\pi_x = 75.54$ 元，最適的運送次數 $m = 2$ 次，每次最適的運送數量 $q = 215$，最小的全年聯合總成本爲$3,130.29。

表 2 可控前置時間之最適求解程序列表

m	*i*	*L*(週)	πx	*q*	*Q*	*TCb*	*TCv*	*JTC*
1	0	8	$75.76	306	306	$1,874.76	$1,518.93	$3,393.68
	1	6	$75.76	306	306	$1,758.98	$1,518.97	$3,277.94
	2	4	$75.76	306	306	$1,671.21	$1,519.00	$3,190.21
	3	3	$75.76	306	306	$1,700.71	$1,518.98	$3,219.69
2	0	8	$75.54	215	430	$2,021.97	$1,386.80	$3,408.77
	1	6	$75.54	215	430	$1,862.31	$1,386.84	$3,249.15
	2	4	$75.54	215	430	$1,743.43	$1,386.86	****$3,130.29**
	3	3	$75.54	215	430	$1,788.96	$1,386.85	$3,175.81
3	0	8	$75.44	175	525	$2,221.26	$1,384.59	$3,605.86
	1	6	$75.44	175	525	$2,027.34	$1,384.61	$3,411.95
	2	4	$75.44	175	525	$1,884.17	$1,384.62	$3,268.79
	3	3	$75.44	175	525	$1,942.22	$1,384.62	$3,326.83
4	0	8	$75.37	150	600	$2,421.15	$1,414.97	$3,836.11
	1	6	$75.37	150	600	$2,197.86	$1,414.95	$3,612.81
	2	4	$75.37	150	600	$2,033.86	$1,414.94	$3,448.80
	3	3	$75.37	150	600	$2,102.65	$1,414.95	$3,517.60

**最小的買賣雙方聯合總成本

五、結　論

在全球市場的環境壓力下，時間成爲企業競爭的關鍵因素，有效的縮短前置時間可減少存貨成本，使企業更具競爭力。在發生缺貨時，除了依賴顧客的忠誠度以及耐心的等待，尚可提供欠撥折扣來處理，利用欠撥折扣來吸引顧客接受欠撥，以提高顧客等待的意願。

根據表 2 可看出，當以賣方立場來做利益考量，在運送次數 m=3 次，前置時間 L=4 週時，賣方最低的全年總成本爲$1,384.62，聯合總成本爲$3,268.79；若以買方立場來做利益考量的話，在運

送次數 m=1 次時，前置時間 L=4 週時，買方最低的全年總成本爲$1,671.21，聯合總成本爲$3,190.21；若以共同立場來考量，則會出現最低的全年聯合總成本$3,130.29，因此，若以共同立場來考量全年聯合總成本，將會比站在賣方立場節省了$138.5，也比站在買方立場節省了$59.92，也就是說，若要顧及整體供應鏈利益的情況下，以共同立場來做考量勢必會比做單方面考量來的有競爭優勢。

參考文獻

[1]蕭裕正，可控前置時間之存貨模型研究，博士論文，國立台灣科技大學，台北市，2001。

[2]蘇佑廷，考慮不完美品質與分批交貨之整合性存貨模式，碩士論文，私立南台科技大學，台南縣，2007。

[3]Abdullah, E. and Gultekin O., “An economic order quantity model with defective items and shortages”, International Journal of Production Economics, 106, 544-549, 2007.

[4]Banerjee, A., “A joint economic-lot-size model for purchaser and vender”, Decision Sciences, 17, 292-311, 1986.

[5]Ben-Daya, M. and Raouf, A., “Inventory models involving lead time as decision variable”, Journal of the Operational Research Society, 45(5), 579-582, 1994.

[6]Goyal, S. K., “An integrated inventory model for a single supplier-single customer problem”, International Journal of Production Research, 15(1), 107-111, 1976.

[7]Goyal, S. K., “A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor: a commen”t, Decision Sciences, 19, 236-241, 1988.

[8]Ha, D. and Kim, S. L., “Implementation of JIT purchasing: an integrated approach”, Production Planning and Control, 8(2), 152-157, 1997.

[9]Lee, W. C., Wu, J. W. and Lei, C. L., “Computational algorithmic procedure for optimal inventory policy involving ordering cost reduction and back-order discounts when lead time demand is controllable”, Applied Mathematics and Computation, 189, 186-200, 2007.

[10]Liao, C. J. and Shyu, C. H., “An analytical determination of lead time with normal demand”, International Journal of Operations and production Management, 11(9), 72-78, 1991.

[11]Lin, Y. J., “Minimax distribution free with backorder price discount”, International Journal of Production Economics, 111, 118-128, 2008.

[12]Ouyang, L. Y. and K. S. Wu, “A Minimax Distribution Free Procedure for Mixed Inventory Model with Variable Lead Time”,International Journal of Production Economics, Vol.56, pp.511-516, 1998.

[13]Ouyang, L. Y. and Chang, H. C., “Lot size reorder point inventory model with controllable lead time and set-up cost”, International Journal of Systems Science, 33, 635-642, 2002.

[14]Ouyang, L. Y., YEN, N. C. and Wu, K. S., “Mixture inventory model with backorders and lost sales for variable lead time”, Journal of the Operational Research Society, 47, 829-832, 1996.

[15]Paknejad, M. J. Nasri, F. and Affisco, J. F., “Defective units in a continuous review (s,Q) system”, International Journal of Production Research, 33, 2767-2777, 1995.

[16]Pan, C. H. and Yang, Y. S., “A study of an integrated inventory with controllable lead time”, International Journal of Production Economics, 40(5), 1263-1273, 2002.

[17]Salameh, M. K. and Jaber, M. Y., “Economic production quantity model for items with imperfect quality”, International Journal of Production Economics, 64, 59-64, 2000.

[18]Schwaller, R. L., “EOQ under inspection costs”, Production and Inventory Management, 29, 22-24, 1988.

[19]Tersine, R. J., Principles of inventory and materials management, New York, North Holland, 1982.

附　錄

對給定的 m 與 $L \in [L_i, L_{i-1}]$，i=1,2,…,n，先求得 Hessian Matrix H 如下：

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q \partial \pi_x} \\ \dfrac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial \pi_x \partial q} & \dfrac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial \pi_x^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q^2}=\frac{D}{q^3}\left\{\frac{A+F}{m}+F+\left[\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2+\pi_0-\pi_x\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k)+C_i(L)\right\}>0 \quad \text{(A-1)}$$

$$\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial \pi_x^2}=\frac{D}{q}\times\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)>0 \quad \text{(A-2)}$$

$$\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q \partial \pi_x}=-\frac{D}{q^2}\left[\frac{2}{\pi_0}\pi_x-1\right]\sigma\sqrt{L}\psi(k) \quad \text{(A-3)}$$

由(A-1)、(A-2)與(A-3)可得

$$\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q^2}\times\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial \pi_x^2}-\left[\frac{\partial^2 JTC_i(q,\pi_x,L,m)}{\partial q \partial \pi_x}\right]^2$$

$$=\frac{D}{q^3}\left\{\frac{A+S}{m}+F+\frac{1}{\pi_0}\pi_x^2\sigma\sqrt{L}\psi(k)+\pi_0\sigma\sqrt{L}\psi(k)-\pi_x\sigma\sqrt{L}\psi(k)+C_i(L)\right\}\times$$

$$\frac{D}{q}\times\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)-\frac{D^2}{q^4}\times\frac{4}{\pi_0^2}\pi_x^2\sigma^2L\psi^2(k)+2\left[\frac{D^2}{q^4}\times\frac{2}{\pi_0}\pi_x\sigma^2L\psi^2(k)\right]-\frac{D^2}{q^4}\sigma^2L\psi^2(k)$$

$$=\frac{D^2}{q^4}\left[\frac{A+S}{m}\times\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)+\frac{2}{\pi_0}F\sigma\sqrt{L}\psi(k)+\frac{2}{\pi_0^2}\pi_x^2\sigma^2L\psi^2(k)+2\sigma^2L\psi^2(k)\right]-$$

$$\frac{D^2}{q^4}\left[\frac{2}{\pi_0}\pi_x\sigma^2L\psi^2(k)-\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)C_i(L)+\frac{4}{\pi_0^2}\pi_x^2\sigma^2L\psi^2(k)-\frac{4}{\pi_0}\pi_x\sigma^2L\psi^2(k)\right]-$$

$$\frac{D^2}{q^4}\left[\sigma^2L\psi^2(k)\right]$$

$$=\frac{D^2}{q^4}\left\{\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)\left[\frac{A+S}{m}+F+C_i(L)\right]+\sigma^2L\psi^2(k)\left[2-\frac{2}{\pi_0^2}\pi_x^2+\frac{4}{\pi_0}\pi_x-\frac{2}{\pi_0}\pi_x-1\right]\right\}$$

$$=\frac{D^2}{q^4}\left\{\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)\left[\frac{A+S}{m}+F+C_i(L)\right]+\sigma^2L\psi^2(k)\left[2-\frac{2}{\pi_0^2}\pi_x^2+\frac{2}{\pi_0}\pi_x-1\right]\right\}$$

$$=\frac{D^2}{q^4}\left\{\frac{2}{\pi_0}\sigma\sqrt{L}\psi(k)\left[\frac{A+S}{m}+F+C_i(L)\right]+\sigma^2L\psi^2(k)\left[1-2\left(\frac{\pi_x^2}{\pi_0^2}-\frac{\pi_x}{\pi_0}\right)\right]\right\}>0 \qquad \text{(A-4)}$$

故當給予任意的m值且 $L\in[L_i,L_{i-1}]$，$JTC_i(q,\pi_x,L,m)$ 爲 (q,π_x) 的凸函數。