



量測重複性與再現性分析之研究

方正中
南台科大管資系副教授
jjfang@mail.stut.edu.tw

王鵬森
南台科大管資系助理教授
peng@mail.stut.edu.tw

李好莉
南台科大工管所研究生
leeyl@yuntech.edu.tw

摘要

近年來在 QS 9000 及 ISO/IEC 17025 等有關量測品保標準大力推行下，從事品質研究者開始著重量測變異分析的研究，其中量測重複性及再現性（Gauge Repeatability and Reproducibility, GR&R）的研究尤其受到重視。當量測系統在對產品與量測人員有交互作用存在時，一般都以變異數分析法來做量測分析，但在量測分析中，尚有傳統 GR&R 和長表格分析方法，雖然運算過程簡易，但是卻忽略了產品與量測人員有交互作用存在時的情況。所以本研究主要針對此項差異，提出估算過程上的修正，讓傳統 GR&R 和長表格分析方法亦能夠在產品與量測人員有交互作用存在時提供較精確的分析結果。同時，本研究使用模擬的方式並以量測總變異的平均真值比、變異數和均方誤差為準則，比較八種不同估算方式的量測總變異，並建議最佳的量測變異分析方法。本研究也探討在固定參數組合數（ npk ）下，如何選取最佳的量測參數組合數（即產品數 n 、量測人員數 p 、重複量測次數 k ）。

關鍵字：量測變異分析、重複性、再現性、交互作用

The Study of Gauge Repeatability and Reproducibility

Jeng-Jung Fang
Department of Management and
Information Technology Southern
Taiwan University of Technology

jjfang@mail.stut.edu.tw

Peng-Sen Wang
Department of Management and
Information Technology Southern
Taiwan University of Technology

peng@mail.stut.edu.tw

Yu-Li Lee
Graduate Program of Industrial
Management
Southern Taiwan University of
Technology

leeyl@yuntech.edu.tw

Abstract

Due to the QS 9000 and ISO/IEC 17025 quality standards put emphasis on the requirement of measurement system, the recent researches of gauge repeatability and reproducibility (GR&R) in gauge variation study have caused much attention. The current measurement system usually utilizes the method of the analysis of variance (ANOVA) to analyze the measurement system while there is interaction between the products and operators. There are other methods can be used to analyze the measurement systems such as Classical GR&R and Long Form methods. Although they are easy in calculation, they are not suitable to analyze the measurement system while there is interaction between the products and operators. Based on the disadvantage of Classical GR&R and Long Form methods, the research would like to modify the methods to make them are suitable no matter there is interaction between products and operators or not. In the mean time, the research will compare the repeatability and reproducibility variance estimators of eight different measurement methods by simulating a measurement system based on the criterion of the biasness, variance, and mean squares error (MSE) of the gauge variance estimators. The research will evaluate the accuracy and precision of the variance estimators of the five methods by changing the parameters (n , p or k) of the measurement system subject to the total number of the combination being fixed.

Keywords : Gauge Analysis, Repeatability, Reproducibility, Interaction

緒論

一、研究動機與目的

量測數據是否精確，將影響進一步統計資料分析的準確性與有效性，因此，在數據蒐集前，需先針對整個量測系統進行分析，包括量測儀器的校正、量測人員的訓練及量測變異的分析等評估，使量測系統在可接受的範圍。

目前產業界和學術界所進行的 GR&R 研究分析[2][9][10][11][13][18][20][30]主要的方法有三種，第一種是 Mandel [22] 利用 ANOVA(Analysis of Variance)[22][23][25][26][27][28][29]的概念，以期望均方和求解 GR&R 中的量測總變異；第二種是傳統方法(Classical GR&R Studies) [19][23][25][30]，此法係以平均數與全距的概念求得 GR&R 之量測總變異；第三種則是 QS9000 在 MSA 手冊[12]中所介紹的北美三大汽車公司所開發的長表格 (Long Form) 法[1][4][6][8][13][18][19]，當取得量測資料後，僅需將所得數值填入此表格，便可快速求得量測變異估計值。此三種方法估算所得之 GR&R 分析結果是否有顯著差異，尤其當產品與量測人員有交互作用的情況其差異如何，頗值得探討與分析。

此外，GR&R 研究在進行分析前必須決定產品數 (n)、量測人員數 (p) 以及重複量測次數 (k)，一般來說當參數的組合數 (npk) 愈大，所估算出來的量測總變異會愈接近其真值，但相對地所花費的時間與成本就愈高。因此，如何選取最佳的量測參數組合數(即產品數 n、量測人員數 p、重複量測次數 k) [3][15][16]，亦為量測變異分析需探討的課題。

二、研究範圍與假設

為簡化問題之複雜度，本研究的研究範圍與假設如下所示：

1. 所量測物件的特性可以進行重複量測。
2. 量測過程不會改變或破壞量測物件之特性。
3. 所探討的量測系統為計量特性。
4. 針對單一品質特性之量測系統進行研究。
5. 品質特性為一常態隨機變數，且其變異數為一常數，即被量測物的品質特性之分佈符合常態分配。
6. 不同產品量測值之間彼此獨立，即任意非重複的兩量測值之間無任何關係存在。
7. 本研究中將量測環境因素與量具變異中重複量測變異以外可能會造成的誤差，都假設已經在控制之下，而不去考慮。

貳、文獻探討

一、量測相關名詞定義

有關量測的名詞定義如下：

1. 量測系統 (Measuring System)：用來定出量測特性其數值之相關人員、軟體、設備、程序、量具和作業之組合。
2. 真值 (True Value)：某一品質特性理論上的正確值，其實際上無法求得。
3. 準確度 (Accuracy)：同一人使用同一量測系統對同一物件重複測量時，其平均值 (實際量測值) 與該物作真值之間的偏差程度。即平均量測值與平均真值之差。
4. 精密度 (Precision)：量具在同一條件、用同一方法對同一物件重複量測時，其測量結果重複的程度。
5. 重複性 (Repeatability)：單一量測人員使用同一量具，重複量測同一物件上之品質特性所獲得量測之變異性。
6. 再現性 (Reproducibility)：不同量測人員使用同一量具，量測同一物件上之品質特性時，所獲得量測之變異。
7. 量測的重複性與再現性 (Gauge Repeatability and Reproducibility, GR&R)：為量測能力之整體評量表現，簡稱為量測變異。
8. 交互作用 (Interaction)：兩個因子不同水準組合所造成的影響包含兩部份：一部份由兩因子的主效應單獨解釋，另一部份則由兩個因子共同解釋，則稱為交互作用。

二、量測的重複性與再現性之估算方法

量測重複性與再現性的估算方法可分為：

1. 變異數分析法 (ANOVA)

根據 Montgomery and Runger [24]所提的 ANOVA 模式概念，探討因子間的變異程度，以評估量測系統的重複性與再現性，進而衡量量測系統的整體表現。在相同的量測條件的控制下，採二隨機因子實驗設計模式，其中一因子為產品 (P)，有 n 個水準；另一因子為量測人員 (O)，有 p 個水準，此二因子為隨機效應 (Random Effect) [13][23][24]，此設計模式為隨機效應模式 (Random Effects Model)，並重複量測 k 次，其線性模型如(1)式：

$$X_{ijk} = \mu + P_i + O_j + PO_{ij} + R_{ijk} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, K, n \\ j = 1, 2, K, p \\ k = 1, 2, K, k \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 X_{ijk} 表第 j 個量測人員在第 i 個產品上，重複第 k 次量測所得之值， μ 為總平均

數， P_i 、 O_j 、 PO_{ij} 、 R_{ijk} 皆為隨機效應因子，假設服從常態分配與其平均數均為零，其相對應的變異數為 σ_P^2 、 σ_O^2 、 σ_{PO}^2 及 σ_R^2 ，並假設為常數。當產品與量測人員交互作用顯著時，則量測變異之不偏估計式如 (2) 所示。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{repeatability}^2 &= \hat{\sigma}_R^2 = MS_R \\ \hat{\sigma}_{reproducibility}^2 &= \hat{\sigma}_O^2 + \hat{\sigma}_{PO}^2 = [MS_O + (n-1)MS_{PO} - nMS_R] / nk \\ \hat{\sigma}_{gauge}^2 &= \hat{\sigma}_{repeatability}^2 + \hat{\sigma}_{reproducibility}^2 = [MS_O + (n-1)MS_{PO} + n(k-1)MS_R] / nk \end{aligned} \quad (2)$$

使用變異數分析法時可能會得到負的估計值，如 $\hat{\sigma}_{po}^2 < 0$ ，這是不合理的，因為根據變異數的定義是不為負的，一般認定負的估計值即表示該變異數成份為零，即 $\hat{\sigma}_{po}^2 = 0$ (產品與量測人員無交互作用) [23][27]，然後配適一個縮模型 (Reduced Model)，其模式如 (3) 所示：

$$X_{ijk} = \mu + P_i + O_j + R_{ijk} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, K, n \\ j = 1, 2, K, p \\ k = 1, 2, K, \kappa \end{array} \right. \quad (3)$$

模式中所使用的變數、定義和假設皆與模式 (1) 式相同，此時量測變異的估計式，如 (4) 所示：

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{repeatability}^2 &= \hat{\sigma}_R^2 = MS_R \\ \hat{\sigma}_{reproducibility}^2 &= \hat{\sigma}_O^2 = (MS_O - MS_R) / nk \\ \hat{\sigma}_{gauge}^2 &= \hat{\sigma}_{repeatability}^2 + \hat{\sigma}_{reproducibility}^2 = [MS_O + (nk-1)MS_R] / nk \end{aligned} \quad (4)$$

2. 傳統 GR&R 法

Montgomery and Runger [23] 又介紹另一種分析方法“Classical Gauge Repeatability and Reproducibility Study”，其量測記錄方式如表 1 所示。其重複性的標準差估算方式如 (5) 式所示。其中 d_2 (附錄 A) 乃根據重複次數 k 決定。

表 1 Classical GR&R 之量測記錄表

人員 重複 產品	量測人員 1				量測人員 2				...	量測人員 p			
	量測值		平均	全距	量測值		平均	全距		量測值		平均	全距
1	X ₁₁₁	X ₁₁₂	$\bar{X}_{11\bullet}$	R ₁₁	X ₁₂₁	X ₁₂₂	$\bar{X}_{12\bullet}$	R ₁₂	...	X _{1p1}	X _{1p2}	$\bar{X}_{1p\bullet}$	R _{1p}
	...	X _{11k}			...	X _{12k}			...	X _{1pk}			
2	X ₂₁₁	X ₂₁₂	$\bar{X}_{21\bullet}$	R ₂₁	X ₂₂₁	X ₂₂₂	$\bar{X}_{22\bullet}$	R ₂₂		X _{2p1}	X _{2p2}	$\bar{X}_{2p\bullet}$	R _{2p}
	...	X _{21k}			...	X _{22k}			...	X _{2pk}			

...
n	X _{n11}	X _{n12}	$\bar{X}_{n1\bullet}$	R _{n1}	X _{n21}	X _{n22}	$\bar{X}_{n2\bullet}$	R _{n2}		X _{np1}	X _{np2}	$\bar{X}_{np\bullet}$	R _{np}
	...	X _{n1k}			...	X _{n2k}			...	X _{npk}			
	$\bar{\bar{X}}_{\bullet 1}$		$\bar{R}_{\bullet 1}$	$\bar{\bar{X}}_{\bullet 2}$		$\bar{R}_{\bullet 2}$...	$\bar{\bar{X}}_{\bullet p}$		$\bar{R}_{\bullet p}$			

$$\hat{\sigma}_{repeatability} = \frac{\bar{R}}{d_2} \tag{5}$$

再現性的標準差估算如 (6) 所示。

$$\hat{\sigma}_{reproducibility} = \frac{R_{\bar{X}}}{d_2} \tag{6}$$

其中 $R_{\bar{X}} = \max_j \bar{\bar{X}}_{\bullet j} - \min_j \bar{\bar{X}}_{\bullet j}$ (7)

$\bar{\bar{X}}_{\bullet j}$ 為第 j 個量測人員的量測平均值，(6) 式中 d_2 乃根據量測人員數 p 決定。

3. 長表格法

QS 9000 中 MSA 手冊[12]介紹另一種量測分析方法—長表格 (Long Form)，該方法僅可區分重複性和再現性，但無法分析產品和量測人員有無交互作用。量測變異之估計式分別為 (8) 和 (9)。其中 d_2^* 見附錄 B ($g=1$, m =量測人員數)。

$$\hat{\sigma}_{repeatability} = \frac{\bar{R}}{d_2} \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}_{reproducibility} = \sqrt{\left(\frac{R_{\bar{X}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{\bar{R}}/d_2)^2}{nk}} \tag{9}$$

茲將上述有關重複性及再現性之計算方式彙整如表 2。由該表可知傳統 GR&R 及長表格法對重複性標準差估算方式均相同，如何修正傳統 GR&R 及長表格法對再現性的估算方式使其趨近於變異數分析法的再現性估計值，為本研究之重點。

表 2 重複性與再現性估計方法

標準差 方法	$\hat{\sigma}_{repeatability}$	$\hat{\sigma}_{reproducibility}$
變異數分析法	$\sqrt{MS_R}$	$\sqrt{[MS_O + (n-1)MS_{PO} - nMS_R]/nk}$ (交互作用) $\sqrt{(MS_O - MS_R)/nk}$ (交互作用不顯著)

傳統 GR&R	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\frac{R_{\bar{X}}}{d_2}$
長表格	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\sqrt{\left(\frac{R_{\bar{X}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{nk}}$

參、修正傳統 GR&R 和長表格法

三、修正傳統 GR&R 和長表格法

我們對 Classical GR&R 和長表格中估算再現性變異的方法進行探討時，發現其再現性變異的估算方式中忽略了不同量測人員對每一相同產品量測值之間的差異，即忽略產品與量測人員間的交互作用，故使用 Classical GR&R 和長表格所估算出來的再現性變異，較適用在產品與量測人員無交互作用的情況。

本研究根據再現性變異估算方式的缺失，對該估算方式做一修正，如（10）所示。

$$\bar{R}_{\bar{X}_{ij\bullet}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n R_{\bar{X}_{ij\bullet}}\right)}{n} \quad (10)$$

$$\text{其中， } \bar{X}_{ij\bullet} = \frac{\left(\sum_{k=1}^k X_{ijk}\right)}{k}, \begin{cases} i = 1, \Lambda, n \\ j = 1, \Lambda, p \end{cases} \quad (11)$$

$$R_{\bar{X}_{ij\bullet}} = \max_j \bar{X}_{ij\bullet} - \min_j \bar{X}_{ij\bullet}, \quad i = 1, \Lambda, n \quad (12)$$

林郁智[5]曾對其傳統 GR&R 及長表格法的再現性提出修正如（13）及（14）。

$$\hat{\sigma}'_{reproducibility} = \frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij\bullet}}}{d_2} \quad (13)$$

$$\hat{\sigma}''_{reproducibility} = \sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij\bullet}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{nk}} \quad (14)$$

Montgomery and Runger [23]研究中提及 $E(\hat{\sigma}'_{reproducibility}) = (\sigma_O^2 + \sigma_{PO}^2 + \sigma_R^2/n)^{1/2}$ ，故擬將傳統 GR&R 及長表格法之再現性估計式修改如（15）及（16），以使其為一不偏估計式。

$$\hat{\sigma}'_{reproducibility} = \sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij\bullet}}}{d_2}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{n}} \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_{reproducibility}'' = \sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij\bullet}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{n}} \quad (16)$$

Burdick 與 Larsen [15]研究中提出量測人數對整個參數變數的信賴區間有重要的影響，其次為產品數，故資源有限的情況下其建議增加量測人員數及產品數，最後為重複次數。江巧玉[3]研究中建議在相同樣本組合數下，可多指派量測人員，但若量測人員數固定時，則可選擇多抽取樣本、重複量測次數較少的組合；由此可知量測人員的水準數(p)，為一重要因子，故將長表格法 GR&R 之再現性估計式修改如 (17)。

$$\hat{\sigma}_{reproducibility}''' = \sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij\bullet}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{npk}} \quad (17)$$

四、判別 GR&R 估算法之比較基準

假設在真值 (θ) 已知的情況下，由程式模擬 (N 次) 除了可以計算平均重複性變異、平均再現性變異和平均量測總變異之外，本研究另外提出了三種比較方式，分別是量測總變異的平均真值比 (Mean Ratio of Estimated Gauge Variance)、量測總變異的變異數 (Variance of Estimated Gauge Variance) 和量測總變異的均方誤差 (Mean Squares Error of Estimated Gauge Variance, MSE)。

平均真值比的用意是將模擬所得的量測變異之估計變量除以其真值，用來檢視所估計的變量相對於真值的準確度 (不偏性)，其公式如 (18) 所示。其判定的方式，則是平均真值比越接近 1，表示估計量的準確度越高。

$$\frac{\sum \left(\frac{\text{量測總變異估計變量}}{\text{真值}} \right)}{\text{模擬次數}} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{\sigma}_{gauge}^2}{\theta_{gauge}^2} \right)}{N} \quad (18)$$

量測變異的變異數定義為，在模擬多次的狀況下，計算量測變異的樣本變異數，其主要用來判斷估計量的精密度，其公式如 (19)。其判斷方式，則是當估計值的變異數越小，表示估計值的精密度越高，信賴區間越短。

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_{gauge}^2)^2 - N \left(\frac{\sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_{gauge}^2}{N} \right)^2}{N-1} \quad (19)$$

均方誤差 (MSE) 的定義如 (20) 式所示，若 $\hat{\theta}$ 為量測估計量， θ 為量測的真值，MSE 可分為兩部分： $\text{Var}(\hat{\theta})$ 衡量估計量 $\hat{\theta}$ 變異之大小，可顯示精密度，另 Bias 為衡量偏差之大小，以顯示準確度；即 MSE 同時考量量測的精密度與準確度。

$$\begin{aligned}
\text{MSE} &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 = E\left[\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right) + \left(E(\hat{\theta}) - \theta\right)\right]^2 \\
&= E\left[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right]^2 + E\left[E(\hat{\theta}) - \theta\right]^2 \\
&= \text{Var}(\hat{\theta}) + \text{Bias}^2
\end{aligned} \tag{20}$$

本研究計算量測總變異的均方誤差 (21)。若 MSE 越小，表示估計量的準確度與精密度越高。

$$\frac{\sum (\text{量測總變異估計變異} - \text{真值})^2}{\text{模擬次數}} = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_{gauge}^2 - \theta_{gauge}^2)^2}{N} \tag{21}$$

黃文璋[7]及 Bickel and Doksum [14]指出 MSE 因具有較易計算及較易處理 (如積分及微分) 且其同時考量量測的精密度與準確度，故傾向以 MSE 最小來求“最佳”估計量，故於下一單元模擬比較時將以該準則作為主要判定何種估計方法較佳，並再以平均真值比及量測總變異的變異數輔助之。

肆、八種估算量測變異的模擬與比較

五、模擬比較的估計量

本研究依據式 (1) 的模型，使用 Visual Basic 軟體模擬數據，並對 ANOVA、Classical GR&R (CRR)、Long Form (LF)、林郁智[5] Modified Classical GR&R (MCRR_L)、林郁智[5] Modified Long Form (MLF_L)、現擬修正的 Modified Classical GR&R (MCRR_N)、現擬修正的二種不同的 Modified Long Form (MLF_{N1}) 和 (MLF_{N2}) 八種不同的量測變異數估算法加以比較分析。茲依下列步驟進行模擬。

步驟一、設定產品數 n 、量測人員數 p 、量測重複次數 k 。

取產品數 n 為 15、20 和 25；量測人員數 p 為 2、3 和 4；重複量測次數 k 為 2 和 3。

步驟二、設定量測人員變異數 (σ_o^2)、產品與量測人員的交互作用變異數 (σ_{po}^2) 及重複量測變異數 (σ_R^2)。

取量測人員變異數 (σ_o^2) 為 1 和 2；若產品與量測人員的交互作用存在時，則取 σ_{po}^2 為 0.5 和 1，若產品與量測人員的交互作用不顯著時則 σ_{po}^2 為 0；取重複量測變異 (σ_R^2) 為 0.25 和 0.5。

步驟三、根據步驟一與步驟二，模擬一組量測資料。

步驟四、將步驟三的資料，使用八種不同 GR&R 估算方法，求出重複性變異、再現性變異和量測總變異，其公式彙整如表 3，量測總變異估算方式即為

$$\hat{\sigma}_{gauge}^2 = \hat{\sigma}_{repeatability}^2 + \hat{\sigma}_{reproducibility}^2$$

步驟五、重複步驟三和步驟四，共模擬 10000 次。

步驟六、計算八種不同估算方法的量測總變異的平均真值比、變異數和均方誤差。

表 3 八種不同重複性及再現性估算方法彙整表

方法 \ 標準差	$\hat{\sigma}_{repeatability}$	$\hat{\sigma}_{reproducibility}$
變異數分析法 (ANOVA)	$\sqrt{MS_R}$	$\sqrt{[MS_O + (n-1)MS_{PO} - nMS_R]/nk}$ (交互作用) $\sqrt{(MS_O - MS_R)/nk}$ (交互作用不顯著)
傳統 GR&R (CRR)	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\frac{R_{\bar{X}}}{d_2}$
長表格 (LF)	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\sqrt{\left(\frac{R_{\bar{X}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{nk}}$
林郁智 (2005) Modified Classical GR&R (MCRR _L)	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij}}}{d_2}$
林郁智 (2005) Modified Long Form (MLF _L)	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{nk}}$
Modified Classical GR&R (MCRR _N)	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij}}}{d_2}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{n}}$
Modified Long Form (MLF _{N1})	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{n}}$
Modified Long Form (MLF _{N2})	$\frac{\bar{R}}{d_2}$	$\sqrt{\left(\frac{\bar{R}_{\bar{X}_{ij}}}{d_2^*}\right)^2 - \frac{(\bar{R}/d_2)^2}{npk}}$

六、個案探討

現以 Montgomery [23]中所使用的案例資料 (表 4 和表 5) 加以證驗。

表 4 GR&R 估算方法的之比較 (交互作用不顯著)

	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
$\hat{\sigma}_{repeatability}^2$	0.88316	1.03883	1.03883	1.03883	1.03883	1.03883	1.03883	1.03883
$\hat{\sigma}_{reproducibility}^2$	0.01063	0.03687	0.00298	0.33182	0.23461	0.27988	0.20864	0.25192
$\hat{\sigma}_{gauge}^2$	0.89379	1.07570	1.04182	1.37065	1.27344	1.31871	1.24747	1.29076

表 5 GR&R 估算方法的之比較 (交互作用顯著)

	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
$\hat{\sigma}_{repeatability}^2$	0.81111	0.85673	0.85673	0.85673	0.85673	0.85673	0.85673	0.85673
$\hat{\sigma}_{reproducibility}^2$	1.95556	0.32617	0.22759	1.90040	1.46385	1.81473	1.40673	1.48289
$\hat{\sigma}_{gauge}^2$	2.76667	1.18290	1.08432	2.75713	2.32058	2.67146	2.26346	2.33962

由表 4 及表 5 可看出當產品與量測人員有交互作用時，傳統的 GR&R 和長表格法有明顯低估再現性變異的情況。當產品與量測人員交互作用不顯著的情況下，傳統的 GR&R 和長表格法與 ANOVA 之再現性變異和總變異之估計相近，但因其僅為一個案探討，將以電腦程式模擬的方式，做更深入的研究。

七、產品與量測人員有交互作用存在

在不同的參數組合數 (npk) 下，八種量測總變異的平均真值比、變異數及均方誤差之數據如表 6、表 7 及表 8 所示。以準確度而言，ANOVA 估算方式為最佳，而本研究所修正的 MLF_{N2}、MLF_{N1} 和 MCRR_N 的估算方式均較原來的 LF 和 CRR 估算方式更接近真值，其中 MLF_{N2} 和 MCRR_N 甚至比林郁智 (2005) 所修正的 MLF_L 和 MCRR_L 更佳，表示 MCRR_N、MLF_{N1} 和 MLF_{N2} 的估算方式在產品與量測人員有交互作用的情況下，其估計量測變異的準確度有提高。而在參數組合數 (npk) 方面，仍然是參數組合數越多，量測變異的準確度就越高，但當時間與經費有限的情况下其參數組合數為 160 時，各種估算方式的量測總變異的變異數與均方誤差均下降的頗為迅速且趨於穩定。綜合考慮量測準確度與精密度時，由量測總變異的均方誤差 (MSE) 可知，MLF_{N2}、MLF_L 和 MLF_{N1} 估算方式為最佳，其次為 ANOVA，接下來依次為 LF、MCRR_N、MCRR_L 和 CRR。

表 6 當 σ_{PO}^2 存在，不同參數組合數之量測總變異的平均真值比之數據

npk	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
60	0.99992	1.07345	0.73680	1.28330	0.87090	1.27326	0.86588	0.87341
80	1.00290	1.06701	0.73359	1.28105	0.87047	1.27355	0.86672	0.87234
90	1.00132	0.98449	0.73441	1.22069	0.90584	1.21074	0.90004	0.90833
100	1.00135	1.05761	0.72807	1.27445	0.86680	1.26848	0.86381	0.86829
120	1.00181	0.93242	0.73009	1.19295	0.93112	1.18467	0.92656	0.93360
135	0.99730	0.89158	0.72878	1.15023	0.93189	1.14032	0.92528	0.93409

150	1.00170	0.97159	0.72638	1.21428	0.90260	1.20834	0.89913	0.90408
160	1.00196	0.83680	0.72621	1.14256	0.98448	1.13512	0.98076	0.98727
180	0.99860	0.86209	0.72640	1.13303	0.94744	1.12438	0.94168	0.94950
200	1.00003	0.83146	0.72241	1.13941	0.98253	1.13347	0.97956	0.98476
225	1.00090	0.88358	0.72373	1.15010	0.93302	1.14417	0.92907	0.93434
240	1.00306	0.83704	0.72758	1.12047	0.96699	1.11306	0.96205	0.96884
300	0.99777	0.82610	0.71881	1.11294	0.96109	1.10702	0.95715	0.96257

表 7 當 σ_{PO}^2 存在，不同參數組合數之量測總變異的變異數之數據

nPK	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
60	5.47996	13.26481	5.44368	11.81386	4.85053	11.81228	4.84975	4.85092
80	5.42147	13.15658	5.39818	11.66686	4.78862	11.66601	4.78819	4.78884
90	4.08540	8.78172	4.06200	7.96567	3.70028	7.96478	3.69979	3.70052
100	5.26746	12.83734	5.26715	11.32926	4.64957	11.32866	4.64928	4.64972
120	3.31271	6.71065	3.31888	6.09945	3.03359	6.09883	3.03326	3.03379
135	2.67564	4.32408	2.66799	4.06057	2.50555	4.06006	2.50521	2.50566
150	4.00685	8.72273	4.02054	7.85736	3.63428	7.85703	3.63410	3.63437
160	1.78815	2.54287	1.81538	2.39093	1.70699	2.39047	1.70676	1.70716
180	2.22111	3.43652	2.24488	3.22354	2.10619	3.22326	2.10600	2.10626
200	1.78544	2.55868	1.82632	2.39284	1.70803	2.39260	1.70790	1.70812
225	2.68892	4.38284	2.70386	4.08910	2.52271	4.08890	2.52258	2.52275
240	1.80884	2.58880	1.84766	2.43578	1.73848	2.43555	1.73833	1.73854
300	1.73018	2.48806	1.77567	2.32901	1.66219	2.32886	1.66210	1.66223

表 8 當 σ_{PO}^2 存在，不同參數組合數下之量測總變異的均方誤差之數據

nPK	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
60	5.48003	13.43717	5.97236	12.41789	4.98660	12.37826	4.99452	4.98279
80	5.42161	13.31763	5.93504	12.26056	4.92340	12.23141	4.92944	4.92046
90	4.08576	8.93853	4.58565	8.36119	3.78661	8.33071	3.79388	3.78443
100	5.26762	13.00501	5.81270	11.91950	4.78468	11.89654	4.78960	4.78228
120	3.31270	6.89754	3.86516	6.40621	3.09641	6.38456	3.10028	3.09521
135	2.67571	4.46350	3.21255	4.23207	2.54396	4.21146	2.54955	2.54224
150	4.00691	8.87785	4.57462	8.22713	3.72440	8.20938	3.72889	3.72298
160	1.78815	2.77417	2.36896	2.53968	1.71318	2.52474	1.71357	1.71303
180	2.22119	3.63160	2.80296	3.36057	2.13248	3.34513	2.13615	2.13131
200	1.78530	2.80557	2.39771	2.53463	1.71500	2.52308	1.71545	1.71474
225	2.68870	4.54186	3.27074	4.26231	2.56033	4.24997	2.56363	2.55928
240	1.80898	2.81897	2.39323	2.54686	1.74903	2.53447	1.75093	1.74841
300	1.73009	2.74652	2.36107	2.42389	1.67642	2.41471	1.67832	1.67577

當參數組合數為 120 時，不同 n 、 p 、 k 的組合下，其量測總變異的均方誤差之數據如表 9，顯示當參數組合數固定時，建議優先增加量測人員數，再考量增加產品數，其次為重複次數。當量測總變異的真值小於（含）2.5 時，其量測總變異的均方誤差較為穩定，且當參數（ n, p, k ）組合為（15, 4, 2）時，其各種估算方式間的差異較小且均方誤差值亦最小。

表 9 當 σ_{PO}^2 存在，參數組合數為 120 時，量測總變異的均方誤差之數據

σ_{gauge}^2	n	p	k	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
1.75	15	4	2	0.72929	1.09726	0.94722	1.03521	0.69474	1.02669	0.69513	0.69454
	20	2	3	2.24486	5.48985	2.45923	5.03025	2.04615	5.01875	2.05030	2.04513
	20	3	2	1.09822	1.82742	1.32751	1.74192	1.02699	1.73420	1.02806	1.02632
2	15	4	2	0.76801	1.13980	0.98022	1.15944	0.73291	1.13378	0.73018	0.73535
	20	2	3	2.27846	5.55085	2.48122	5.07504	2.01606	5.04831	2.02284	2.01446
	20	3	2	1.09660	1.80579	1.31925	1.79247	0.99991	1.77090	0.99969	1.00025
2.25	15	4	2	0.83547	1.68035	1.69362	1.11627	0.77890	1.10884	0.78105	0.77737
	20	2	3	2.32554	5.56590	3.12624	4.50497	2.02883	4.49590	2.03705	2.02680
	20	3	2	1.19396	2.26986	2.02310	1.75391	1.07675	1.74654	1.07930	1.07509
2.5	15	4	2	0.86775	1.65861	1.68344	1.23045	0.78691	1.20593	0.78728	0.78703
	20	2	3	2.41151	5.71525	3.20320	4.68625	2.04572	4.66425	2.06058	2.04210
	20	3	2	1.15803	2.23733	2.03164	1.75280	1.01443	1.73345	1.01779	1.01238
2.75	15	4	2	2.87656	4.13263	3.14120	4.14948	2.82514	4.13480	2.82554	2.82494
	20	2	3	8.46103	21.3929	8.71552	20.5880	8.09975	20.5626	8.10408	8.09870
	20	3	2	4.05917	6.69174	4.33134	6.70036	3.95506	6.68610	3.95626	3.95430
3	15	4	2	2.86347	4.12967	3.15728	4.20793	2.80629	4.17234	2.80459	2.80795
	20	2	3	8.40152	21.1353	8.66301	20.2346	7.94128	20.1834	7.94967	7.93927
	20	3	2	4.46847	7.32525	4.70552	7.44054	4.30470	7.40528	4.30453	4.30500
3.25	15	4	2	2.81331	4.34103	3.78315	3.85777	2.70861	3.84658	2.71179	2.70633
	20	2	3	8.61232	21.0881	9.42805	19.3476	7.90987	19.3255	7.91858	7.90772
	20	3	2	4.27535	7.03756	5.16504	6.65056	4.05110	6.63895	4.05470	4.04874
3.5	15	4	2	2.91502	4.44118	3.82336	4.14237	2.77864	4.10800	2.78008	2.77794
	20	2	3	8.49887	20.6941	9.35377	18.8700	7.70799	18.8256	7.72532	7.70375
	20	3	2	4.25195	7.09306	5.22069	6.68067	3.97700	6.65242	3.98229	3.97366

八、產品與量測人員交互作用不顯著

在不同的參數組合數（ npk ）下，八種量測總變異的平均真值比、變異數及均方誤差

之數據如表 10、表 11 及表 12 所示。以準確度而言，ANOVA 估算方式為最佳，其次為 LF、MLF_{N2}、MLF_{N1} 和 MLF_L 但其彼此相近且與 ANOVA 相差不多；而 CRR、MCRR_L 及 MCRR_N 的估算結果均較差。而在參數組合數 (npk) 方面，當然是參數組合數越多，量測變異的準確度就越高，但當時間與經費有限的情況下其參數組合數為 160 時，各種估算方式的量測總變異的變異數與均方誤差均下降的頗為迅速且穩定。綜合考慮量測準確度與精密度時，由量測總變異的均方誤差 (MSE) 可知，ANOVA 估算方式為最佳，其次為 MLF_{N1}、MLF_L、MLF_{N2} 和 LF 但其彼此相近且與 ANOVA 相差不多，接下來依次為 CRR、MCRR_N 和 MCRR_L。

表 10 當 σ_{PO}^2 不顯著，不同參數組合數之量測總變異的平均真值比之數據

npk	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
60	0.99727	1.46113	1.00631	1.49557	1.02798	1.48121	1.02079	1.03157
80	1.00488	1.46956	1.01312	1.50382	1.03481	1.49308	1.02944	1.03749
90	1.00795	1.35631	1.01329	1.40064	1.04659	1.38641	1.03829	1.05015
100	0.99834	1.45767	1.00613	1.49286	1.02848	1.48432	1.02420	1.03061
120	0.99467	1.27202	0.99812	1.32879	1.04328	1.31696	1.03677	1.04683
135	1.00362	1.22973	1.00661	1.27465	1.04188	1.26050	1.03244	1.04502
150	1.00009	1.34005	1.00458	1.38550	1.03880	1.37700	1.03384	1.04092
160	1.00168	1.15369	1.00223	1.23430	1.07032	1.22366	1.06500	1.07431
180	1.00424	1.19127	1.00489	1.24019	1.04486	1.22783	1.03661	1.04780
200	0.99820	1.15029	1.00038	1.23170	1.06915	1.22320	1.06490	1.07233
225	1.00186	1.22479	1.00448	1.27083	1.04063	1.26237	1.03498	1.04251
240	1.00139	1.15078	1.00142	1.20350	1.04594	1.19291	1.03888	1.04859
300	0.99747	1.14617	0.99820	1.19932	1.04309	1.19085	1.03745	1.04521

表 11 當 σ_{PO}^2 不顯著，不同參數組合數之量測總變異的變異數之數據

npk	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
60	5.07580	12.52476	5.14068	12.29407	5.04795	12.29233	5.04711	5.04837
80	4.95948	12.24014	5.02221	12.00667	4.92768	12.00588	4.92728	4.92789
90	3.90817	8.56945	3.96268	8.46973	3.91572	8.46894	3.91525	3.91595
100	5.11167	12.60829	5.17317	12.37285	5.07754	12.37224	5.07724	5.07769
120	3.02436	6.21288	3.08289	6.12872	3.03890	6.12804	3.03855	3.03910
135	2.58567	4.27357	2.63705	4.22923	2.60977	4.22862	2.60939	2.60990
150	3.78189	8.27657	3.83173	8.17698	3.78457	8.17666	3.78439	3.78466
160	1.68238	2.42514	1.73133	2.37651	1.69664	2.37608	1.69643	1.69681
180	2.13057	3.33354	2.17568	3.29390	2.14957	3.29359	2.14937	2.14965
200	1.65785	2.43975	1.74168	2.38421	1.70207	2.38389	1.70192	1.70219

225	2.53699	4.18935	2.58447	4.14268	2.55572	4.14249	2.55559	2.55576
240	1.67825	2.42886	1.73350	2.39560	1.70977	2.39538	1.70963	1.70982
300	1.67166	2.42882	1.73341	2.39146	1.70676	2.39130	1.70666	1.70680

表 12 當 σ_{PO}^2 不顯著，不同參數組合數下之量測總變異的均方誤差之數據

npk	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
60	5.07534	13.37058	5.14033	13.24372	5.05029	13.19441	5.04822	5.05147
80	4.95972	13.07303	5.02265	12.94529	4.93172	12.90852	4.93020	4.93256
90	3.90827	9.12940	3.96323	9.12143	3.92395	9.08264	3.92116	3.92552
100	5.11149	13.46359	5.17327	13.33342	5.08050	13.30437	5.07937	5.08112

續表 12 當 σ_{PO}^2 不顯著，不同參數組合數下之量測總變異的均方誤差之數據

npk	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
120	3.02440	6.56738	3.08280	6.57649	3.04731	6.55062	3.04516	3.04887
135	2.58551	4.48287	2.63700	4.51509	2.61593	4.48860	2.61303	2.61703
150	3.78191	8.79461	3.83181	8.78670	3.79199	8.76439	3.79066	3.79280
160	1.68231	2.51351	1.73133	2.57053	1.71355	2.55349	1.71085	1.71571
180	2.13060	3.48260	2.17569	3.51283	2.15629	3.49331	2.15377	2.15732
200	1.65778	2.52702	1.74154	2.57665	1.71855	2.56312	1.71641	1.72024
225	2.53684	4.38573	2.58434	4.41525	2.56126	4.39972	2.55965	2.56184
240	1.67832	2.52034	1.73351	2.55124	1.71803	2.53647	1.71565	1.71901
300	1.67153	2.51677	1.73329	2.54148	1.71349	2.52998	1.71175	1.71420

當參數組合數為 120 時，其量測總變異的均方誤差之數據如表 13，顯示當參數組合數固定時，建議優先增加量測人員數，再考量增加產品數，其次為重複次數。當量測總變異的真值小於（含）1.5 時，其量測總變異的均方誤差較為穩定，且當參數（n, p, k）組合為（15, 4, 2）時，其各種估算方式間的差異較小且均方誤差亦最小。

表 13 當 σ_{PO}^2 不顯著，參數組合數為 120 時，量測總變異的均方誤差之數據

σ_{gauge}^2	n	p	k	ANOVA	CRR	LF	MCRR _L	MLF _L	MCRR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
1.25	15	4	2	0.66781	1.00523	0.69607	1.02552	0.68472	1.01641	0.68355	0.68569
	20	2	3	2.03180	5.35594	2.05620	5.32008	2.03206	5.30488	2.03163	2.03218
	20	3	2	0.96270	1.68114	0.99303	1.69766	0.97507	1.68872	0.97430	0.97563
1.5	15	4	2	0.69156	1.04442	0.71744	1.12427	0.71834	1.09746	0.71251	0.72310
	20	2	3	2.07245	5.45956	2.09916	5.37557	2.03833	5.34347	2.03678	2.03881
	20	3	2	1.03534	1.81345	1.06586	1.88514	1.04806	1.86088	1.04405	1.05092

σ_{gauge}^2	n	p	k	ANOVA	CRR	LF	MCCR _L	MLF _L	MCCR _N	MLF _{N1}	MLF _{N2}
2.25	15	4	2	2.77716	4.19326	2.89889	4.21458	2.86491	4.19920	2.86369	2.86592
	20	2	3	7.70621	20.2489	7.79813	20.1947	7.76278	20.1662	7.76272	7.76281
	20	3	2	3.93911	6.84707	4.03316	6.87608	3.99740	6.85979	3.99646	3.99807
2.5	15	4	2	2.69952	4.06491	2.78742	4.16174	2.75326	4.12189	2.74718	2.75822
	20	2	3	7.73971	20.3332	7.83550	20.1917	7.74011	20.1323	7.73904	7.74047
	20	3	2	3.96950	6.76145	4.01280	6.85082	3.95265	6.81617	3.95000	3.95460

伍、結論

茲將本研究之結論詳述如下：

1. 本研究所修正的 MLF_{N1} 和 MLF_{N2} 無論在產品與量測人員交互作用是否顯著的情況下，均可得到較佳的量測變異的估計值，而以 MLF_{N2} 稍佳。
2. 當產品與量測人員有交互作用存在時，長表格和傳統 R&R 估算方式所得的變異估計值均偏離真值許多，而本研所修正的 MLF_{N1} 、 MLF_{N2} 及 $MCCR_N$ 模式均較長表格和傳統 R&R 估算方式更能提高量測的準確度與精確度，並且接近真值，其中又以 MLF_{N2} 的估計變異結果跟 ANOVA 相似。另外在參數組合數 (npk) 的大小上，則是參數組合數越多，所估算出來的量測變異準確度與精密度越高。
3. 本研究建議在做量測系統分析時，可以先考慮使用計算較簡易的 MLF_{N2} 的估算方式，其準確度與精密度與 ANOVA 方法幾乎無異，且不用擔心產品與量測人員交互作用是否顯著；又因計算簡易即使不是統計背景出身的品質管理人員亦可以輕鬆地使用，且可迅速獲得結果。雖然 ANOVA 方法通常必須使用電腦來計算，且同時可能會產生再現性估計變異為負值的狀況，但是對於要進一步分析量測系統中因子的影響，還是必須使用 ANOVA 來做量測分析。
4. 固定參數組合數 (npk)，探討了產品數 n、量測人員數 p、量測重複次數 k 的影響。根據程式模擬的分析結果，本研究建議應以增加量測人員數為優先考量，其次是增加量測產品數，再其次是增加量測重複次數。其中量測人員數至少需 3 人以上，其量測變異的變異數及均方誤差才不至於太大。
5. 有關參數組合數部分，依據程式模擬的分析結果，建議參數組合數至少為 160，其將使量測變異的變異數及均方誤差值急遽下降且趨於平穩。
6. 若已知產品與量測人員有交互作用存時，其量測總變異的真值應控制在 2.5 以下；若產品與量測人員交互作用不顯著時，其量測總變異的真值應控制在 1.5 以下，其將使量測變異的變異數及均方誤差值較為平穩。

參考文獻

1. 王丕承 (2003), “實踐六標準差的技術”, 中國生產力中心。
2. 古瓊忠 (2003), “品質管制與檢驗－國際標準 ISO 17025 實驗室品質與技術”, 全華科技。
3. 江巧玉 (2002), “量測系統重覆性與再現性的分析研究”, 成功大學統計研究所, 碩士論文。
4. 李旭華 (2003), “品質管理”, 華泰書局。
5. 林郁智 (2005), “產品與量測人員有交互作用存在下之量測重複性與再現性分析”, 南台科技大學工業管理研究所, 碩士論文。
6. 陳日光(1998, 6), “ISO 9001「4.11 檢驗、量測與試驗設備」之探討”, 品質管制月刊。
7. 黃文璋 (2003), “數理統計”, 華泰書局。
8. 劉漢容、陳文魁 (2005), “品質管理－六標準差式”, 滄海書局。
9. 鄭希龍(1997), “檢測數據分析與管制作業”, 量測資訊, 第 58 期, 79~87 頁。
10. 鄭希龍(2001), “量測系統分析(MSA)之作法與解析”, 量測資訊, 第 77 期, 54~60 頁。
11. 鄭昔福 (2003,1), “六標準差相關工具應用之心得 (四): 量測系統分析”, 品質月刊, 39 卷, 第 1 期, 56~59 頁。
12. AIAG Editing Group (1991), “Measurement Systems Analysis-Reference Manual (MSA)”, 1nd ed., Automotive Industries Action Group.
13. Barraentine, L. B. (1991), “Concepts for R&R Studies”, ASQC Quality Press, Milwaukee, Wisconsin.
14. Bickel, P. J. and Doksum, K. A. (1977), “Mathematical Statistics – Basic Ideas and Selected Topics”, Holden-Day, Inc., San Francisco, California.
15. Burdick, R. K. and Larsen, G. A. (1997), “Confidence Intervals on Measures of Variability in R&R Studies”, Journal of Quality Technology, Vol.29, No.3, pp.261-273.
16. Burdick, R. K., Park Y. J. and Montgomery, D. C. (2005), “Confidence Intervals for Misclassification Rates in a Gauge R&R Study”, Journal of Quality Technology, Vol.37, No.4, pp.294-303.
17. Duncan, A. J. (1986), “Quality Control and Industrial Statistics”, 5nd ed., Homewood, Illinois.
18. Floyd, D. A. and Laurent, C. J. (1995-96), “Gauging: An Underestimated Consideration In The Application Of Statistical Process Control,” Quality Engineering, Vol.8, No.1, pp.13-29
19. Fruit, R. (1997), “The New Approach to Gage R&R”, Manufacturing Engineering, Vol.119, No.1, pp.16.
20. Jaynes, K. R. (1997), “Reviewing Gage R&R”, Manufacturing Engineering, Vol.118, No.2, pp.12.
21. Kenett, R. S. and Zacks, S.(1998), “Modern Industrial Statistics :Design and Control of Quality and Reliability”, Pacific Grove :Duxbury Press, pp. 353.
22. Mandel, J. (1972), “Repeatability and Reproducibility”, Journal of Quality Technology, Vol.4, No.2, pp.74-85.
23. Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (1993a), “Gauge Capability Analysis and Designed Experiments. Part I : Basic Methods”, Quality Engineering, Vol.6, No.1, pp.115-135.

24. Montgomery, D. C. and Runger, G. C. (1993b), "Gauge Capability Analysis and Designed Experiments. Part II : Experimental Design Models and Variance Component Estimation", Quality Engineering, Vol.6, No.2, pp.289-305.
25. Montgomery D. C. (2001), "Introduction to Statistical Quality Control", 4nd ed., John Wiley & Sons, New York.
26. Montgomery D. C. (2005a), "Design and Analysis of Experiments", 5nd ed., John Wiley & Sons, New York, pp.66-69, pp.531-534.
27. Montgomery D. C. (2005b), "Introduction to Statistical Quality Control", 5nd ed., John Wiley & Sons, New York, pp.93-96, pp.326-375.
28. Tsai, P. (1988-89), "Variable Gauge Repeatability and Reproducibility Study Using The Analysis Of Variance Method", Quality Engineering, Vol.1, No.1, pp.107-115.
29. Vardeman, S. B. and VanValkenburg, E. S. (1999), "Two-way Random-effect Analyses and Gauge R&R Studies", Technometrics, Vol.41, No.3, pp.202-211.
30. Wheeler, D. J. and Lyday, R. W. (1990), "Evaluating the Measurement Process", 2nd ed., SPC Press, Knoxville, Tenn.

附錄 A 修正因子 d_2

n	d_2	n	d_2	n	d_2	n	d_2
2	1.1283	8	2.8471	14	3.4070	20	3.735
3	1.6926	9	2.9699	15	3.4720	21	3.778
4	2.0587	10	3.0774	16	3.532	22	3.819
5	2.3259	11	3.1730	17	3.588	23	3.858
6	2.5343	12	3.2580	18	3.64	24	3.895
7	2.7044	13	3.3360	19	3.689	25	3.931

資料來源：Kenett [21] and Montgomery [25].

附錄 B 修正因子 d_2^*

Number of Samples (g)	Size of Samples or Number of Operators (m)													
	2		3		4		5		6		7		8	
	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*
1	1.0	1.41	2.0	1.91	2.9	2.24	3.8	2.48	4.7	2.67	5.5	2.83	6.3	2.96
2	1.9	1.28	3.8	1.81	5.7	2.15	7.5	2.40	9.2	2.60	10.8	2.77	12.3	2.91
3	2.8	1.23	5.7	1.77	8.4	2.12	11.1	2.38	13.6	2.58	16.0	2.75	18.3	2.89
4	3.7	1.21	7.5	1.75	11.2	2.11	14.7	2.37	18.1	2.57	21.3	2.74	24.4	2.88
5	4.6	1.19	9.3	1.74	13.9	2.10	18.4	2.36	22.6	2.56	26.6	2.73	30.4	2.87
6	5.5	1.18	11.1	1.73	16.6	2.09	22.0	2.35	27.1	2.56	31.8	2.73	36.4	2.87
7	6.4	1.17	12.9	1.73	19.4	2.09	25.6	2.35	31.5	2.55	37.1	2.72	42.5	2.87
8	7.2	1.17	14.8	1.72	22.1	2.08	29.3	2.35	36.0	2.55	42.4	2.72	48.5	2.87
9	8.1	1.16	16.6	1.72	24.8	2.08	32.9	2.34	40.5	2.55	47.7	2.72	54.5	2.86
10	9.0	1.16	18.4	1.72	27.6	2.08	36.5	2.34	44.9	2.55	52.9	2.72	60.6	2.86
11	9.9	1.16	20.2	1.71	30.3	2.08	40.1	2.34	49.4	2.55	58.2	2.72	66.6	2.86

Number of Samples (g)	Size of Samples or Number of Operators (m)													
	2		3		4		5		6		7		8	
	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*
12	10.8	1.15	22.0	1.71	33.0	2.07	43.7	2.34	53.9	2.55	63.5	2.72	72.7	2.85
13	11.6	1.15	23.9	1.71	35.7	2.07	47.4	2.34	58.4	2.55	68.8	2.71	78.7	2.85
14	12.5	1.15	25.7	1.71	38.5	2.07	51.0	2.34	62.8	2.54	74.0	2.71	84.7	2.85
15	13.4	1.15	27.5	1.71	41.2	2.07	54.6	2.34	67.3	2.54	79.3	2.71	90.8	2.85
d_2	1.13		1.69		2.06		2.33		2.53		2.70		2.85	

續附錄 B 修正因子 d_2^*

Number of Samples (g)	Size of Samples or Number of Operators (m)													
	9		10		11		12		13		14		15	
	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*	v	d_2^*
1	7.0	3.08	7.7	3.18	8.4	3.27	9.0	3.35	9.6	3.42	10.2	3.49	10.8	3.55
2	13.8	3.02	15.1	3.13	16.5	3.22	17.8	3.30	19.0	3.38	20.2	3.45	21.3	3.51
3	20.5	3.01	22.6	3.11	24.6	3.21	26.5	3.29	28.4	3.37	30.2	3.43	31.9	3.50
4	27.3	3.00	30.1	3.10	32.7	3.20	35.3	3.28	37.8	3.36	40.1	3.43	42.4	3.49
5	34.0	2.99	37.5	3.10	40.9	3.19	44.1	3.28	47.1	3.35	50.1	3.42	52.9	3.49
6	40.8	2.99	45.0	3.10	49.0	3.19	52.8	3.27	56.5	3.35	60.1	3.42	63.5	3.49
7	47.5	2.99	52.4	3.10	57.1	3.19	61.6	3.27	65.9	3.35	70.0	3.42	74.0	3.48
8	54.3	2.98	59.9	3.09	65.2	3.19	70.3	3.27	75.3	3.35	80.0	3.42	84.6	3.48
9	61.0	2.98	67.3	3.09	73.3	3.18	79.1	3.27	84.6	3.35	90.0	3.42	95.1	3.48
10	67.8	2.98	74.8	3.09	81.5	3.18	87.9	3.27	94.0	3.34	99.9	3.42	105.6	3.48
11	74.6	2.98	82.3	3.09	89.6	3.18	96.6	3.27	103.4	3.34	109.9	3.41	116.2	3.48
12	81.3	2.98	89.7	3.09	97.7	3.18	105.4	3.27	112.8	3.34	119.9	3.41	126.7	3.48
13	88.1	2.98	97.2	3.09	105.8	3.18	114.1	3.27	122.2	3.34	129.9	3.41	137.3	3.48
14	94.8	2.98	104.6	3.08	113.9	3.18	122.9	3.27	131.5	3.34	139.8	3.41	147.8	3.48
15	101.6	2.98	112.1	3.08	122.1	3.18	131.7	3.26	140.9	3.34	149.8	3.41	158.3	3.48
d_2	2.97		3.08		3.17		3.26		3.34		3.41		3.47	

資料來源：Duncan [17].