1. 解 $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$， $y(0) = 1$，$y'(0) = 1$.

〈解〉 $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 = 0$

$m = -2, -2$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 xe^{-2x}$

$W(e^{-2x}, xe^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$

$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ xe^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = -x^2 e^{-4x}$

$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & xe^{-2x} \end{vmatrix} = xe^{-4x}$

$u_1' = \dfrac{W_1}{W} = \dfrac{-x^2 e^{-4x}}{e^{-4x}} = -x^2$

$u_1 = \int -x^2 dx = -\dfrac{x^3}{3}$

$u_2' = \dfrac{W_2}{W} = \dfrac{xe^{-4x}}{e^{-4x}} = x$

$u_2 = \int x dx = \dfrac{x^2}{2}$

$y_P = -\dfrac{x^3}{3} e^{-2x} + \dfrac{x^2}{2} xe^{-2x} = \dfrac{1}{6} x^3 e^{-2x}$

$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 xe^{-2x} + \dfrac{1}{6} x^3 e^{-2x}$

代入 $y(0) = 1$ 得

$C_1 = 1$

$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 xe^{-2x} + \dfrac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \dfrac{1}{3} x^3 e^{-2x}$

代入 $y'(0) = 1$ 得

$-2C_1 + C_2 = 1$

$C_2 = 3$

$y = e^{-2x} + 3xe^{-2x} + \dfrac{1}{6} x^3 e^{-2x}$