

## 微積分期中報告

四技財金一甲 4A480092 潘鈺文

函數的連續性定義：

令  $c$  是區間  $(a, b)$  中的一個數，且  $f$  為定義域包含區間  $(a, b)$  的函數。如果下列的條件為真，則函數  $f$  在  $c$  點是連續的。

1.  $f(c)$  有定義
2.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  存在
3.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 。

如果  $f$  在區間  $(a, b)$  中的每一點都連續，則  $f$  在開區間  $(a, b)$  連續。

函數的極限定義：

若函數  $f(x)$  於  $a$  點的右極限與左極限均存在且相等，則  $f(x)$  於  $a$  點的極限存在記為： $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ，且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 。

例子：

1. 求函數  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

- (1) 在  $x = -1$  的左極限與右極限
- (2) 在  $x = -1$  的極限
- (3) 請問  $f(x)$  在  $x = -1$  是否連續

ANS: (1)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} = -2$  ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} = -2$

(2)  $-2$

(3)  $f(-1)$  沒有定義，所以答案為”否”

2. 求函數  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

- (1) 在  $x = -1$  的左極限與右極限
- (2) 在  $x = -1$  的極限
- (3) 請問  $f(x)$  在  $x = -1$  是否連續

ANS: (1)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow -1^-} = 0$

(2)  $0$

(3)  $f(-1) = 0$ ，有定義

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  極限存在

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$

連續條件皆有存在，所以答案為”是”

3. 求函數  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

請問  $f(x)$  在  $x=0$  是否連續？

ANS:  $f(0) = 1$ ，有定義

但  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在

所以  $f(x)$  在  $x=0$  不連續

答案為”否”

4. 求函數  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$

請問  $f(x)$  在  $x=2$  時是否連續？

ANS:  $f(2) = 1$ ，有定義

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x + 1$$

$$= 3 \text{ (極限存在)}$$

$$\text{但 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

所以  $f(x)$  在  $x=2$  不連續

答案為”否”