

104-1 微積分 期中心得報告

極限：極限(limit)是探討函數(function)的趨勢問題。

討論函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處之極限時：當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 之值變化的趨勢？這可能有以下幾種情況：

- (1) 當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 之值趨近 L ，其意思是只要 x 越接近 a ， $f(x)$ 就可任意接近 L ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (極限存在，且值為 L)
- (2) 若要使極限存在，必須允許 x 從 a 的任一邊趨近 a 。當 x 從左邊與右邊趨近 a 時，若 $f(x)$ 趨近之值不一樣，則極限不存在。(極限值未必等於函數值)
- (3) 當 x 趨近於 a 時 $f(a)$ 值並不影響 $f(x)$ 之極限存在或不存在。

• $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在

- I. 左極限存在
- II. 右極限存在
- III. 左極限=右極限

範例 1：求極限(如果存在的話)。

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2)$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + 2) = 3 * 2 + 2 = 8, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + 2) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 2) = 3 * 2 + 2 = 8, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 2) = 8$$

討論範例 1：左極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + 2) = 8$ 與右極限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 2) = 8$ 存在且相等，故 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$ 。

範例 2：求極限(如果存在的話)。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 2}$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x - 2} = \infty$$

討論範例 2：當 x 從左邊趨近於 2 時， $f(x)$ 遞減沒有界限，當 x 從右邊趨近於 2 時， $f(x)$ 遞增沒有界限，因為 x 趨近於 2 時 f 是無界的，所以極限不存在。

連續性：函數在 $x=a$ 連續的含義是 f 的圖形在 a 的位置沒有中斷，即沒有破洞、跳躍或缺口。粗略的說，如果你可以不用將筆離開紙面就描繪一個函數在某區間的圖形時，你可以說一個函數在這個區間連續。

令 a 是區間 (a,b) 中的一個數，且 f 為定義域包含區間 (a,b) 的函數。若下列條件為真， f 在 (a,b) 區間內的每一點都連續，那麼它就在 (a,b) 區間連續。則 f 在開區間 (a,b) 連續。

• **$f(x)$ 在 $x=a$ 連續**

I. $f(a)$ 有定義

II. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在

III. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

範例 3：若 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 不連續。

解

因為 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ ，所以 $f(x) = x+1, x \neq 1$

討論範例 3：函數 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 的左右極限分別為

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{與} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 。此情形表示函數 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 的左右圖形很靠近，但 $f(1)$ 不存在，故 $f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 有中斷的現象，所以 **$f(x)$ 在 $x=1$ 不連續**，所果想要 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續，必須讓 $f(1)$ 的值能夠連接左右極限，即定義 **$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$** ，如此 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續。

範例 4：若 $f(x) = x+1$ ，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續。 解 $f(x)$ 在任意點皆連續。

討論範例 4：函數 $f(x) = x+1$ ，在 $x=1$ 的左右極限分別為

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \text{與} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

即 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ 。且函數 $f(1) = 2$ 恰巧連接在 $x=1$ 的左右極限值，即 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ，故 $f(x)$ 的圖形在 $x=1$ 沒有中斷、跳躍和缺口的現象，所以 **$f(x)$ 在 $x=1$ 連續**。