初等微積分心得報告-財金三丙 4A280114 周筱珊

1. 判斷極限是否存在

(1) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 存在

(2) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 存在

(3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

2. f(x)在 x=a 連續

(1) f(a)有定義

(2) $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在

(3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 極限值 = 函數值

3. f(x)在 x=a 可微分

(1) f(a)有定義

(2) $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在

$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在

(3) $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

●為何可微分函數一定連續，但連續卻不一定可微分?

連續的定義為正趨近等於負趨近，也就是所在圖形上沒有斷點！
可微分的函數圖形必須是連續且平滑的曲線，不過連續的圖形不一定平滑。
不平滑卻又連續的圖形：
1.鋸齒波與三角波：是連續函數，但不是平滑曲線→不可微分！
2.分段連續函數

(例) **證明** $f(x)=[x]=\begin{cases} n-1 & n-1\le x<n \\ n & n\le x<n+1 \end{cases}$ **不連續且不可微分**

解: 令 n 代表任意整數，則 f(x)在 x = n 處的左極限為：

$$\lim_{x\to n-} f(x) = \lim_{x\to n-} [x] = \lim_{x\to n-} (n-1) = n-1$$

f(x)在 x = n 處的右極限為：

$$\lim_{x\to n+} f(x) = \lim_{x\to n+} [x] = \lim_{x\to n+} n = n$$

由於 f(x)在 x = n 處的左極限與右極限不相等，因此 f(x)在 x = n 處不連續，

故 f(x)在 x = n 處不可微分。

因此得證 f(x)在所有整數點皆不可微分。

(例) 求 x 趨近於 1 時, f(x)= $\begin{cases} x^2, x \le 1 \\ 2x, x > 1 \end{cases}$, 則 f(x)在 x=1 連續且可微分嗎?

解: $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$

兩個單邊極限都存在但是左極限≠右極限, 故不連續所以不可微分。

(例) 設 f(x)=｜x｜ ，則 f 是連續函數，但 f 在 x=0 處不可微分。

解　所以 f 在 x≠0 處是可微分的。

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

因為 $\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \ne \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

故 f'(0)不存在，f 在 x=0 處不可微 。

(例)證明 y=｜x−5｜，在 x=5 處連續且不可微分

先求極限 $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} |x-5|$

右極限 $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} |x-5| = \lim_{x\to 5^+} (x-5) = 0$

左極限 $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} |x-5| = \lim_{x\to 5^-} (5-x) = 0$

依連續的定義知 $\lim_{x\to 5} f(x) = 0 = f(5)$ 滿足。

再討論導數的定義 $f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$

先求右導數 $f'(5^+)=\lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{x-5}{x-5}=1$

再求左導數 $f'(5^-)=\lim_{x\to 5^-}\frac{|x-5|}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{5-x}{x-5}=-1$

得 $f'(5)$ 不存在。

可微分必連續(不可有尖角)，但連續極限不一定存在，舉例來說，x 的絕對值的圖形在 x=0 的地方連續，但因為左右極限值不同，所以極限值不存在。極限存在，圖形必連續。