Ch 3.1 偶數題參考答案

便箋標題 2015/8/25

#12 $f(x)=x^3-x$ 求在點 $(2,6)$ 之切線斜率

即是計算 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$，其中 $f(2)=2^3-2=6$ #

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(2+\Delta x)^3-(2+\Delta x)\right]-6}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8+3\cdot 4\cdot\Delta x+3\cdot 2(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2-\Delta x-6}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3+6(\Delta x)^2+11\Delta x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^2+6\Delta x+11=11$$ #

#18. $h(t) = \sqrt{t-1} \Rightarrow h'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(t+\Delta t)-1} - \sqrt{t-1}}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(t+\Delta t)-1} - \sqrt{t-1}}{\Delta t} \cdot \frac{\sqrt{t+\Delta t-1} + \sqrt{t-1}}{\sqrt{t+\Delta t-1} + \sqrt{t-1}}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t-1) - (t-1)}{\Delta t\left(\sqrt{t+\Delta t-1} + \sqrt{t-1}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}\left(\sqrt{t+\Delta t-1} + \sqrt{t-1}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}$$

#

#20 $f(x) = \frac{1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x+2} - \frac{1}{x+2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+2)-(x+\Delta x+2)}{\Delta x(x+\Delta x+2)(x+2)}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x+\Delta x+2)(x+2)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x+2)(x+2)} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

#

#22 求 $f(x)=(x-1)^2$ 在点 $(-2,9)$ 之切线方程式

(检查 $f(-2)=(-2-1)^2=(-3)^2=9$ ie $y=f(x)$ 的图形过 $(-2,9)$)

由 $f'(-2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(-2+\Delta x-1)^2-9}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x-3)^2-9}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2-6\Delta x+9-9}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2-6\Delta x}{\Delta x}=-6$

可知所求之方程式为 $y-9=-6(x+2)$ #

#26. 由给定之直线方程式 $9x+y-6=0 \Rightarrow y=-9x+6$ 可知所求之切线斜率为 -9。而由 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{(x+\Delta x)^3}{3}-\left(-\frac{x^3}{3}\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)^3+x^3}{3\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\cancel{x^3}+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3)+\cancel{x^3}}{3\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3x^2\Delta x-3x(\Delta x)^2-(\Delta x)^3}{3\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-x^2-x\Delta x-\frac{(\Delta x)^2}{3}$$

$$=-x^2$$

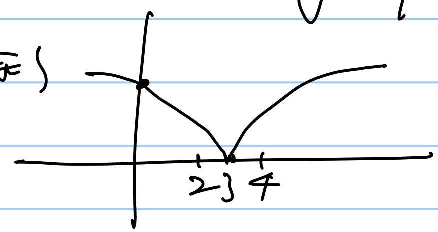
再由 $f'(x)=-9 \iff -x^2=-9$ 可得 $x=\pm 3$

即切点为 $(-3, f(-3))=(-3,9)$ 以及 $(3, f(-3))=(3,-9)$

因此，所求之切线方程式为 $y-9=-9(x+3)$

及 $y+9=-9(x-3)$

#28 $y=(x-3)^{2/3}$ 由图形



可知 y 在 $(3,0)$ 为尖点，

因此 不可微分

#32 "如果函數在一點可微分，則在此點必連續"這個敘述是正確的.

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，即 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 必定存在且記為 $f'(a)$

也就是說 極限的算式中，當 $\Delta x \to 0$ 時，分子與分母的極限必定趨近於 0，意即 $\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(a+\Delta x)-f(a)\right)=0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) = f(a)$$ 這表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續 #