班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

104-1 微積分期中心得報告

極限(Limit)：描述函數的自變量接近某一個值的時候，相對應的函數值變化的趨勢。

極限的符號：

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

讀作「當 x 趨近 c 的時候 $f(x)$ 的極限為 L」。也就是$f(x)$在$x = c$ 的極限為 L。

- 檢查極限的存在方法：

(一) 左極限存在

$$\lim_{x \to c-} f(x)$$

(二) 右極限存在

$$\lim_{x \to c+} f(x)$$

(三) 左極限等於右極限

$$\lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x)$$

但以上上述三點若有一點不成立，表示極限不存在。

以下為例子：

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 1：求極限（如果存在的話）

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 4-x & x<1 \\ 4x-x^2 & x>1 \end{cases}$$

解 ：當 $x < 1$ ， $f(x) = 4 - x$ 可以直接帶入得到

$$\lim_{x\to 1-} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to 1-} (4-\mathrm{x}) = 4-1 = 3$$

當 $x > 1$ ， $f(x) = 4x - x^2$ 可以直接帶入得到

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (4x - x^2) = 4(1) - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

因為兩個單邊極限都存在並且都等於 3，所以

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

因此左右極限都存在，並且相等，故極限存在，並且等於３。

範例 2：求極限（如果存在的話）

$$\lim_{x\to 1} \mathrm{f(x)}$$

其中 $f(x)$ $\begin{cases} \mathbf{x^2+2}, & \mathbf{x<1} \\ \mathbf{3x-5}, & \mathbf{x\geq 1} \end{cases}$

解：

左極限↓

$$\lim_{x\to 1-} (\mathrm{x}^2+2) = 1^2+2 = 3$$

右極限↓

$$\lim_{x\to 1+} (3\mathrm{x}-5) = 3-5 = -2$$

左極限和右極限雖然都存在，然而卻不相等，因此極限並不存在。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

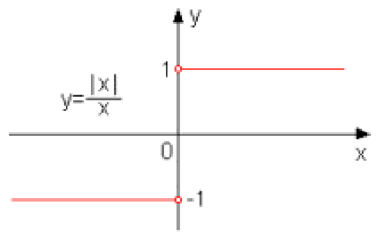
範例 3：求極限（果極限存在的話）

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

解：

左極限：$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0-}(-1)=-1$

右極限：$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+}1=1$



圖一

左極限 ≠ 右極限，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在。

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ 之圖形請參考圖一。

★ **無界函數：**

範例 4：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

解：

左極限：$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^2}=+\infty$

右極限：$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}=+\infty$

記作： $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}=\infty$

但極限並不存在。

範例 4 討論：因為當 *x* 趨近 *0* 的時候 *f*(*x*) 是無界的，所以極限不存在。

在 $\lim_{x\to c+}f(x)=\infty$ 中的等號並不是說極限存在。相反地，只是表示當當 *x* 趨近 *c* 的時候 *f* (*x*) 的變化是無界，因此極限是**不存在**的。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

連續(Continuity)：一個函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 點連續的意思是指 $f(x)$ 的圖形在 c 點沒有中斷。

令 c 是區間 (a,b)中的一個數，且 f 為定義域包含區間(a,b)的函數。如果下列的條件為真，則函數 f 在 c 點是連續的。如果 f 在區間(a,b)中的每一點都連續，則 f 在開區間(a,b)連續。

- 檢查是否連續的存在方法：

(一)函數值有定義

$f(c)$ 有意義

(二)極限值存在

$\lim_{x \to c} f(x)$ 存在

(三)極限值等於函數值

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

但以上上述三點若有一點不成立，表示極限不存在。

以下為舉例：

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 5：

設 $f(x)=\begin{cases} 5x^2-2 & x>2 \\ 18 & x=2 \\ 3x^3-6 & x<2 \end{cases}$，則 $f(x)$ 在點 2 是否連續？

解：當 $x>2$　　$f(x)=5x^2-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(5x^2-2)=18$

當 $x<2$　　$f(x)=3x^3-6$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x^3-6)=18$

$f(2)=18$

$\because \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\therefore$ $f(x)$ 在點 2 連續

範例5討論：函數值有定義，且左極限與右極限皆存在且相等，確立函數值存在。另外函數值也等於極限值，皆為18，因此 $f(x)$ 連續。

(i)　若 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$，則 $f(x)$ 在點 C 為右連續。

(ii)　若 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$，則 $f(x)$ 在點 C 為左連續。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 6：

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = x + 1}, & \boldsymbol{x > 0} \\ \boldsymbol{f(x) = 0}, \boldsymbol{x \leq 0} \end{cases}$$

解：

$f(0) = 0$　　　（函數值存在）

$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1$（左極限存在）

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$（右極限存在）

$\lim_{x \to 0-} f(x) \neq \lim_{x \to 0+} f(x)$　　（左極限不等於右極限）

故：函數在 *x=0* 點是不連續

範例6討論：函數值雖存在，左極限和右極限也存在，然而左極限不等於右極限，表示極限值不存在，因此不符合連續的特點，所以此函數並不連續。

班級：財金一甲　　學號：4A480057　　姓名：蔡宛蓁

★ **閉區間上的連續性：**

範例 7：檢查閉區間的連續性。

討論 $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} 5 - x\,, -1 \le x \le 2 \\ x^2 - 1\,, 2 < x \le 3 \end{cases}}$ **的連續性。**

(1) $5 - x$ 在 [-1,2] 是連續的

(2) $x^2 - 1$在 (2,3) 是連續的

(3) 檢查 *g(x)*在 *x*=2 是否連續

- 函數值 g(2)=5-2=3
- 左極限

$$\lim_{x\to 2-} g(x) = \lim_{x\to 2-} 5 - x = 3$$

- 右極限

$$\lim_{x\to 2+} g(x) = \lim_{x\to 2-} x^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

- 左極限和右極限相等，極限存在
- 函數值等於極限值

$$\lim_{x\to 2} g(x) = g(x) = 3$$

因此，*g* 在 *x*=2 連續，以及它在整個區間[-1,3]連續。

範例7討論：令 f 定義在閉區間 [a,b]，如果f再開區間 (a,b) 連續且

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \quad 和 \quad \lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$$

則 f 在閉區間 [a,b] 連續，此外，f 在 a 是從右邊連續，以及在 b 是從左邊連續。