微分-乘積律和商律

乘積律 ➡ 兩個可微分函數成績的導數等於第一個函數乘第二個的導數加第二個函數成第一個的導數。

也就是: $(fg)'=f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$

例題 1: 求 $f(x) = (4+3x)(6x-x^2)$的導數。

解(1) $f'(x)= 3(6x-x^2)+(4+3x)(6-2x)$

$= 18x-3x^2+24-8x+18x-6x^2$

$= 24+28x-9x^2$

解(2) $f(x) = 24x-4x^2+18x^2-3x^3$

$= 24x+14x^2-3x^3$

$f'(x) = 24+28x-9x^2$

例題 2: 求$f(x) = \left(\frac{1}{x}+3\right)(6x-5)$的導數。

解(1) $f'(x) = (x^{-1}+3)'(6x-5)+(x^{-1}+3)(6x-5)'$

$= (-x^{-2})(6x-5)+(x^{-1}+3)(6)$

$= (-6x^{-1}+5x^{-2})+(6x^{-1}+18)$

$= 5x^{-2}+18$

解(2) $f(x)=6-\frac{5}{x}+18x-15$

$= -\frac{5}{x}+18x-9$

$= -5x^{-1}+18x-9$

$f'(x) = 5x^{-2}+18$

> 直接微分(解 1)與先化簡再微分(解 2)方便性的比較:有時候題型較複雜時使用解 1 比較好算，因為數字如果比較複雜些，化簡的過程也會跟著複雜，同樣的正負號也必須非常小心，不然很容易就會遺漏。

商律 ➡ 計算兩個可微函數的商的導數時，其值等於分母成分子的導數減去分子成分母的導數所得的差，再除以分母的平方。

也就是: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x)-f(x)g(x)'}{g(x)^2}$,$g(x)\neq 0$

例題 1: 求 $f(x) = \frac{(2x-3)(x-1)}{2-3x}$的圖形在給定點(1.0)的切線方程式

$= \frac{2x^2-5x+3}{2-3x}$ 分子先乘開

$$f'(x) = \frac{(2x^2-5x+3)'(2-3x)-(2x^2-5x+3)(2-3x)'}{(2-3x)^2}$$ 再使用商律微分公式

$$= \frac{(4x-5)(2-3x)-(2x^2-5x+3)(-3)}{(2-3x)^2}$$

$$= \frac{(8x-12x^2-10+15x)-(-6x^2+15x-9)}{(2-3x)^2}$$

$$= \frac{8x-8-6x^2+12x-9}{(2-3x)^2}$$

$$= \frac{8x-6x^2-1}{(2-3x)^2}$$

斜率 $=\frac{8-6-1}{(-1)^2} = \frac{1}{1} = 1$

- $y - y_1 = m(x - x_1)$ 利用點斜式把斜率和兩點座標(1,0)帶入
- y = x-1