

# 通訊系統模擬

實習一：

週期訊號與濾波器之模擬與分析

班級：網通四甲

姓名：范盛琮(4A10H023)

陳羿如(4A136058)

指導老師：余兆棠老師

中華民國 104 年 10 月 18 日

# 實習 1 週期訊號與濾波器之模擬與分析

## 1.1 實習目的

本實習主要探討週期信號的特性與其傅利葉級數分析，透過基本的餘弦波及傅利葉級數分析，可學到週期信號(periodic signal)在時域與頻域的特性，並初步建立頻譜的觀念。

## 1.2 理論分析

### 1.2.1 弦波信號時域分析

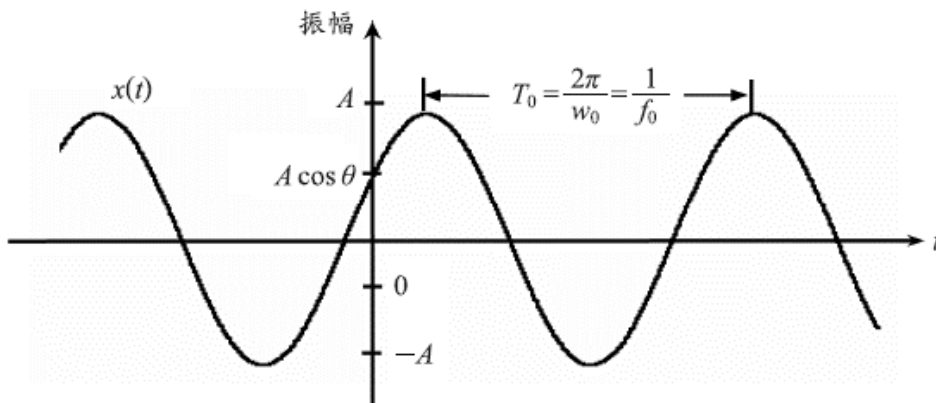
弦波訊號(sinusoidal signal)表示為： $A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$

已知弦波訊號是週期訊號(稍後討論)，其週期為 $T_0$ 。

$A$ ：振幅峰值(peak amplitude)

$\omega_0$  或  $f_0$ ：基本頻率(fundamental frequency)，簡稱頻率。

$\theta$ ：相位(phase)



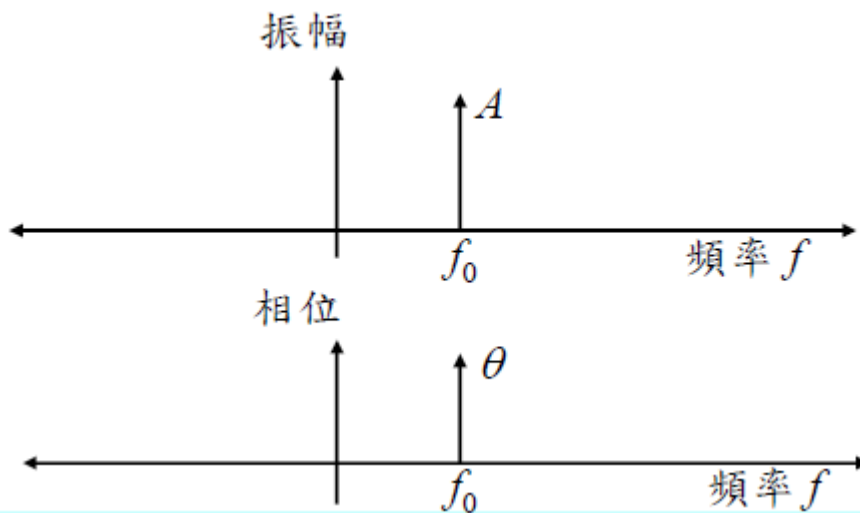
### 1.2.2 弦波信號頻域分析

#### 單邊頻譜

餘弦函數表示弦波訊號： $A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ ,  $A > 0; A \in \mathfrak{R}$

弦波是一個單頻訊號，可直覺地想成單頻訊號的振幅大小和相位都只集中在單一頻率  $f_0$  那一點。

橫軸為頻率之方式繪圖稱為頻域表示法，就是所謂的頻譜(spectrum)，此種將訊號頻譜只表示於正頻率(分佈於  $f \geq 0$  之繪圖稱為單邊頻譜(single-sided spectrum)。因為單頻訊號的振幅大小和相位都只集中在單一頻率  $f_0$  那一點，所以頻譜繪圖時以脈衝訊號表示。

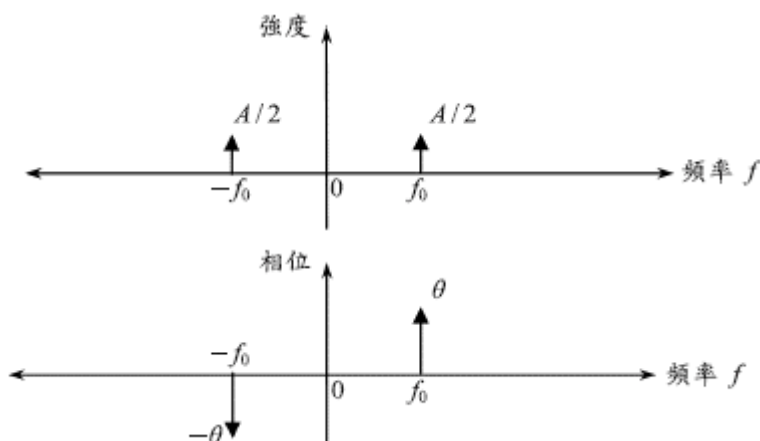


### 雙邊頻譜

利用尤拉公式(Euler formula)將弦波訊號改寫成複指數型式：

$$A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{A}{2} (e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)})$$

以複指數之相關參數繪製頻譜，可得雙邊頻譜(分佈於  $f = 0$  之兩側)。



### 1.2.3 傅利葉級數分析

#### 週期訊號之合成

請決定以下訊號是否為週期訊號，若是，其基本週期(或頻率)

為何。

$$g_1(t) = \pi \sin(0.6t) - 3 \cos(1.5t) + 11 \sin(3t)$$

$$g_2(t) = 5 \sin(0.3\pi t) - 4 \sin(0.7t) + \cos(0.9\pi t)$$

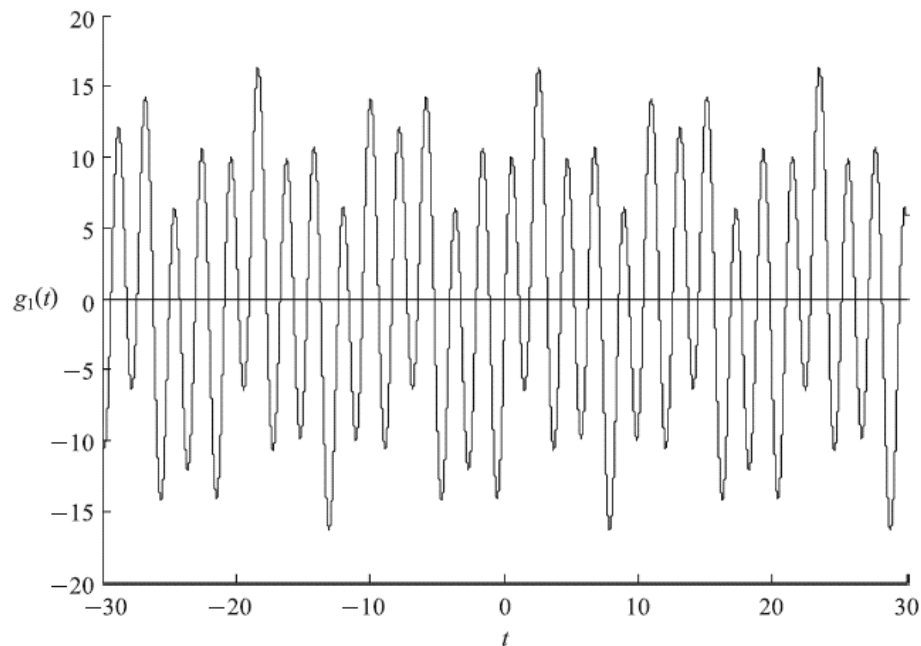
訊號 $g_1(t)$  由3個週期弦波訊號加總得到，這3個週期訊號的基

本頻率分別為 $0.6/2\pi$ 、 $1.5/2\pi$ 以及 $3/2\pi$ 。這3個頻率的最大公

約數為 $0.3/2\pi$ ，計算式如下：

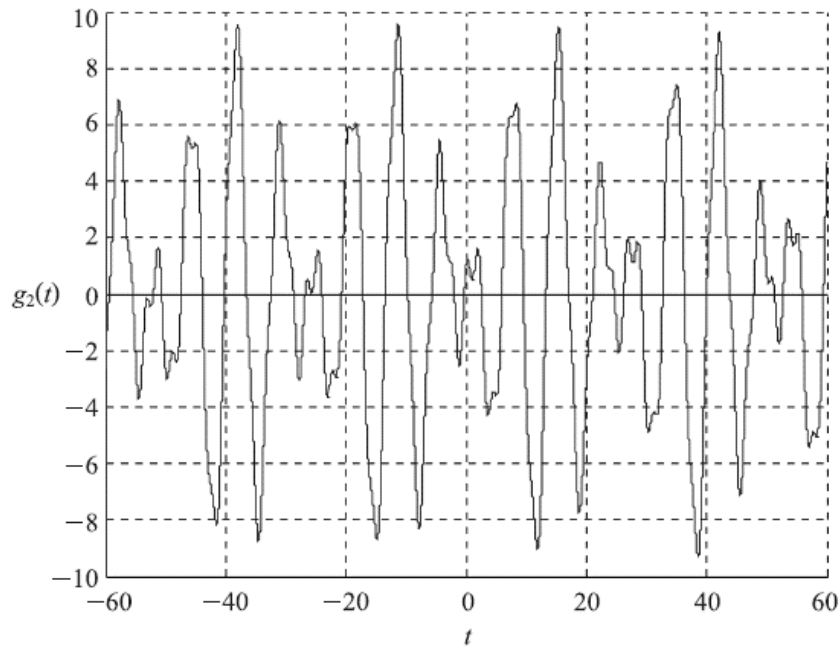
$$\frac{0.3}{2\pi} \quad \left| \quad \begin{array}{ccc} \frac{0.6}{2\pi} & \frac{1.5}{2\pi} & \frac{3}{2\pi} \\ \hline 2 & 5 & 10 \end{array} \right.$$

訊號 $g_1(t)$ 是週期訊號，基本頻率為 $0.3/2\pi$ 。



訊號 $g_2(t)$ 由3個週期訊號加總得到，這3個週期訊號的基本頻率分別為 $0.15$ 、 $0.7/2\pi$ 。

以及 $0.45$ 。這3個頻率的 $\text{最大公約數}$ 無法求得。可知訊號 $g_2(t)$ 不是週期



給定以下4個連續時間週期訊號：

$$x_1(t) = \cos(4\pi t) \text{、} x_2(t) = \cos(8\pi t) \text{、} x_3(t) = \cos(24\pi t) \text{、} x_4(t) = \cos(28\pi t)$$

這4個週期訊號的基本頻率(2、4、12和14)的最大公因數為2，

請產生以下不同的週期訊號並檢驗其基本頻率皆為2 Hz (週期

0.5秒)。

$$(a) g_1(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t) + 1.1x_3(t) - \sqrt{3}x_4(t)$$

$$(b) g_2(t) = \pi x_1(t) - 0.32x_2(t) + x_3(t) - \sqrt{11}x_4(t)$$

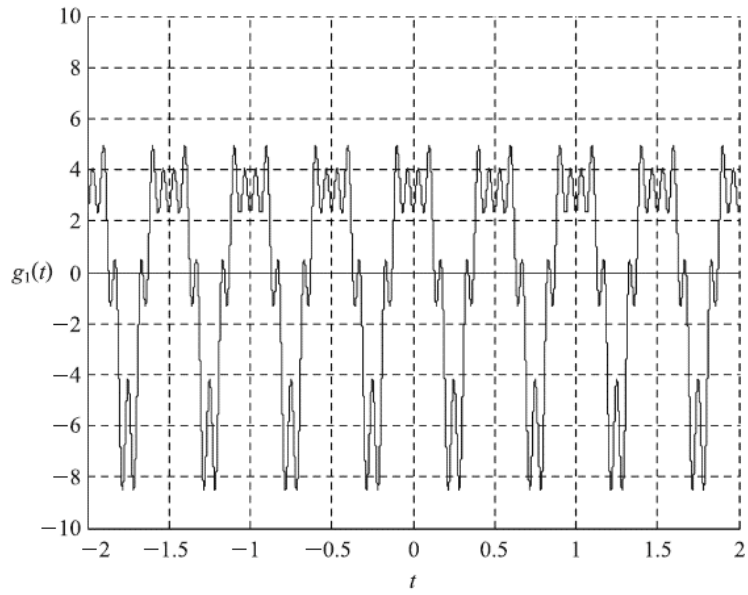


圖 4-19 範例 4-12 之週期信號  $g_1(t)$

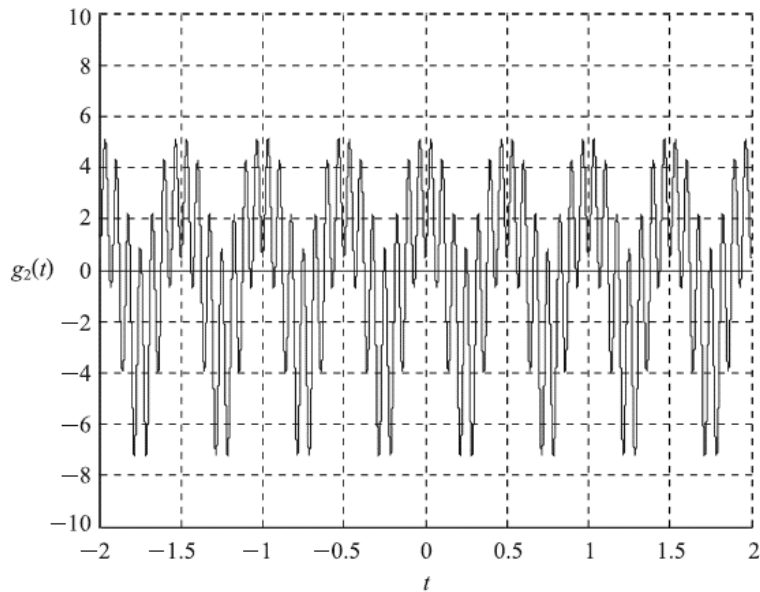


圖 4-20 範例 4-12 之週期信號  $g_2(t)$

### 週期訊號之解析

**範例** 圖 1-1 為一方波週期信號  $x(t)$  之時域波形，其週期為  $T_0$  (基本頻率為  $f_0$ )，求此信號之複指數傅利葉級數以及三角傅利葉級數表示式。

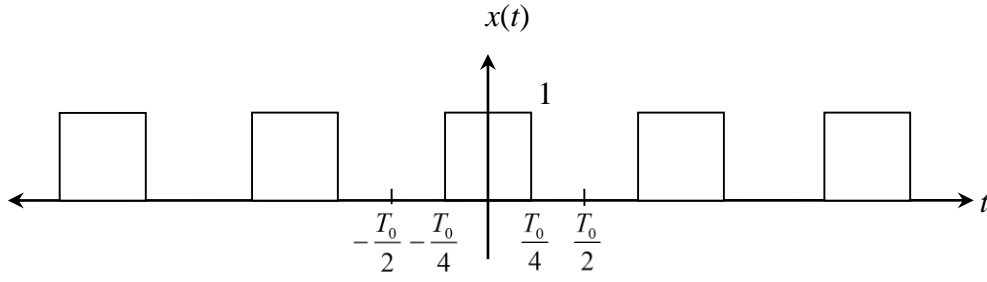


圖 1-1 一方波週期信號之時域波形

### (i) 複指數傅利葉級數

已知週期信號  $x(t)$ ，欲以傅利葉級數表示此信號  $x(t)$ ，首要工作是依(1.4)式計算係數。

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} 1 dt = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{-j2\pi n} [e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2}] = \frac{1}{n\pi} \left[ \frac{e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}}{j2} \right]$$

$$= \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k \neq 0 \\ (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

依(1.4)式將此方波週期信號  $x(t)$  表示成以下之複指數傅利葉級數式展開式。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} e^{j2\pi(2k+1)f_0 t}$$

### (ii) 三角傅利葉級數

此方波週期信號  $x(t)$  為實數，其三角傅利葉級數之係數

$$a_{2k} = 2\text{Re}[c_{2k}] = 0, k \neq 0 \quad a_{2k+1} = 2\text{Re}[c_{2k+1}] = (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

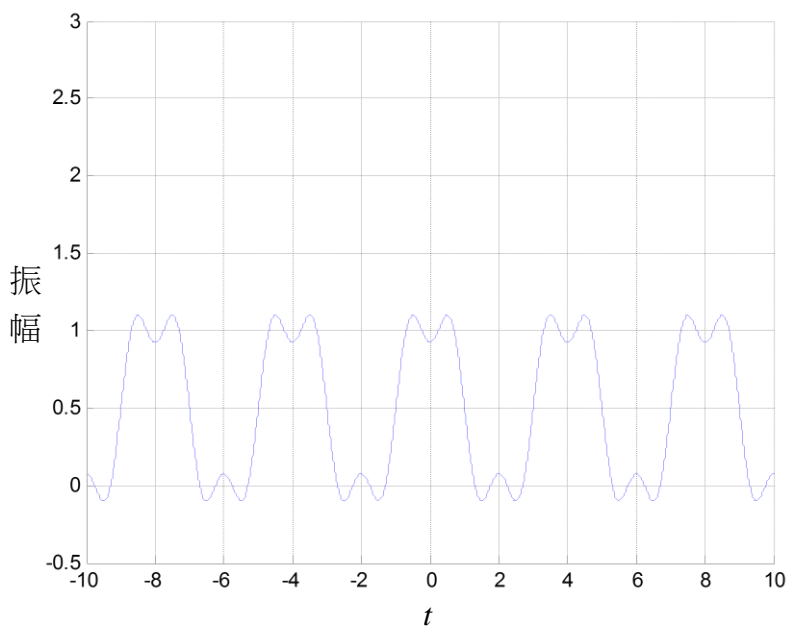
$$b_n = -2\text{Im}[c_n] = 0 \quad \frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{2}$$

最後將此方波週期信號  $x(t)$  表示成以下之三角傅利葉級數式展開式。

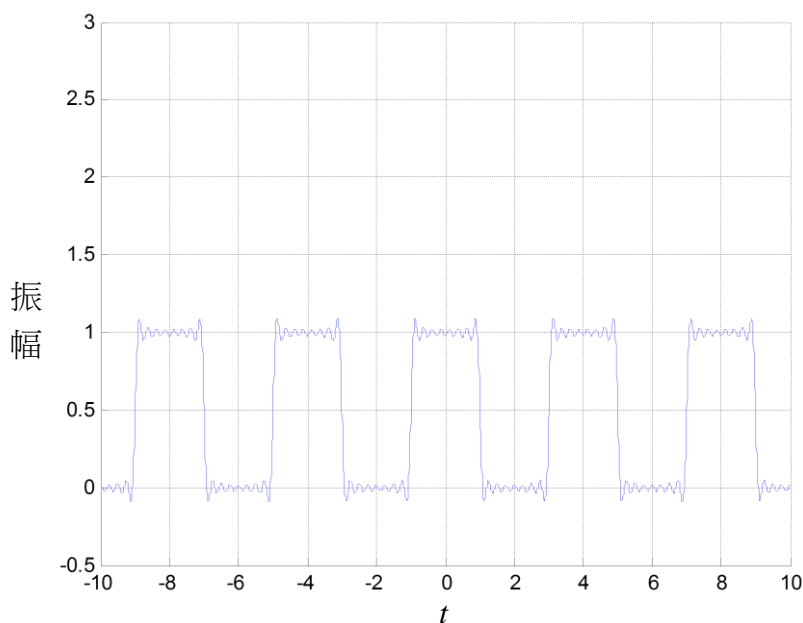
$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi} \cos[2\pi(2k+1)f_0 t]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \cos(2\pi f_0 t) - \frac{1}{3} \cos(6\pi f_0 t) + \frac{1}{5} \cos(10\pi f_0 t) - \frac{1}{7} \cos(14\pi f_0 t) + \dots \right] \quad (1.10)$$

檢視此表示式可知此方波包含有無限多個頻率成份，其中直流成份為  $1/2$ 。以  $T_0 = 4$  為例，圖 1-2(a) 顯示計算(1.10)式前 3 項得到的一個近似此週期方波之波形(包含至 3 次諧波)，若包含至  $15f_0$  頻率成份的波形如圖 1-2(b)所示，如此持續包含更多高次諧波項，可得到一個越來越接近圖 1- 1 所示之方波週期信號  $x(t)$ ，例如圖 1-2(c) 顯示包含至  $101f_0$  頻率成份的波形，已非常近似此方波週期信號。此訊號之頻譜如圖 1-3 所示。

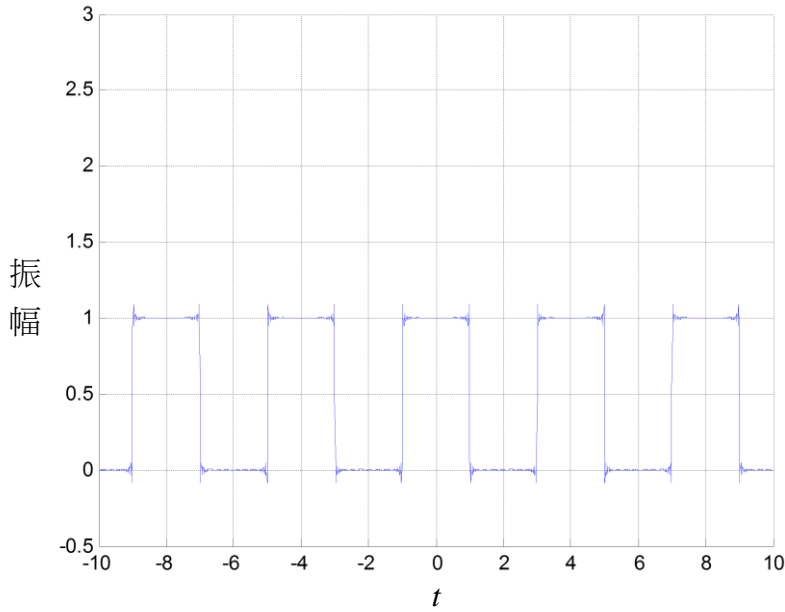


(a) 包含至  $3f_0$  頻率成份的波形



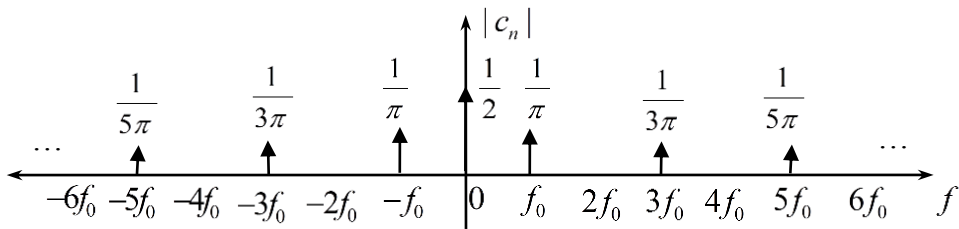


(b) 包含至 $15f_0$  頻率成份的波形

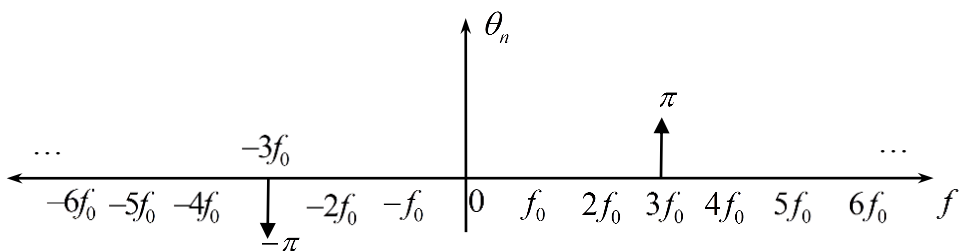


(c) 包含至 $101f_0$  頻率成份的波形

圖 1-2 一方波週期信號  $x(t)$  之傅利葉級數分析



(a) 振幅頻譜



(b) 相位頻譜

圖 1-3 範例之方波週期信號  $x(t)$  之頻譜

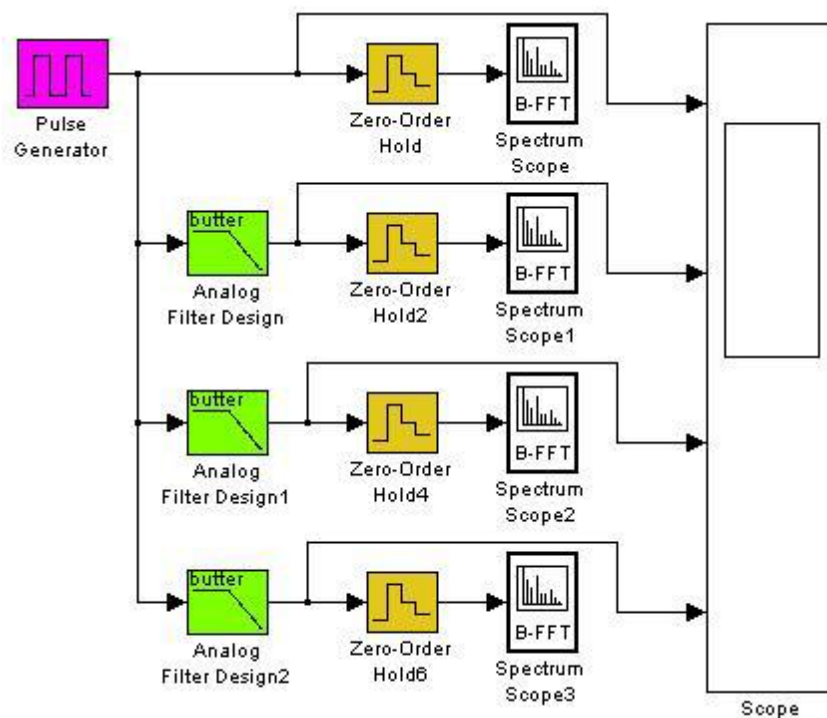
## 1.3 實習方法與步驟

### 1.3.1 週期方波分析與模擬

週期方波的工作週期分別設定為 90% 和 10%，重做週期方波的傅利葉級數解析模擬，分別在時域與頻域觀察與討論其模擬結果。

#### Step 1：建立振幅模擬系統

1. 開啟 MATLAB\Simulink Browser。
2. 開新檔案。
3. 將模塊連結成模擬系統，如下圖所示。

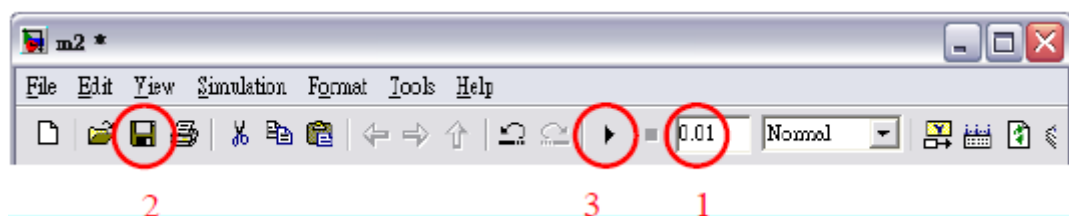


#### Step 2：設定信號參數

1. 方波訊號振幅設定為 1(V)，週期設定為 1/1000(Sec)，脈波寬度設定為 50(%)，其餘皆用預設值。
2. 濾波器設定皆為 **Butterworth Low-pass**，階數為 16，截止頻率分別為  $2\pi \cdot 1100$ 、 $2\pi \cdot 3100$ 、 $2\pi \cdot 7100$ 。
3. **Zero-Order Hold** 取樣時間(Sample time)設定為 1/20000，模擬時間設定為 0.01。
4. **Scope** 與 **Spectrum scope** 設定與先前模擬設定一樣。

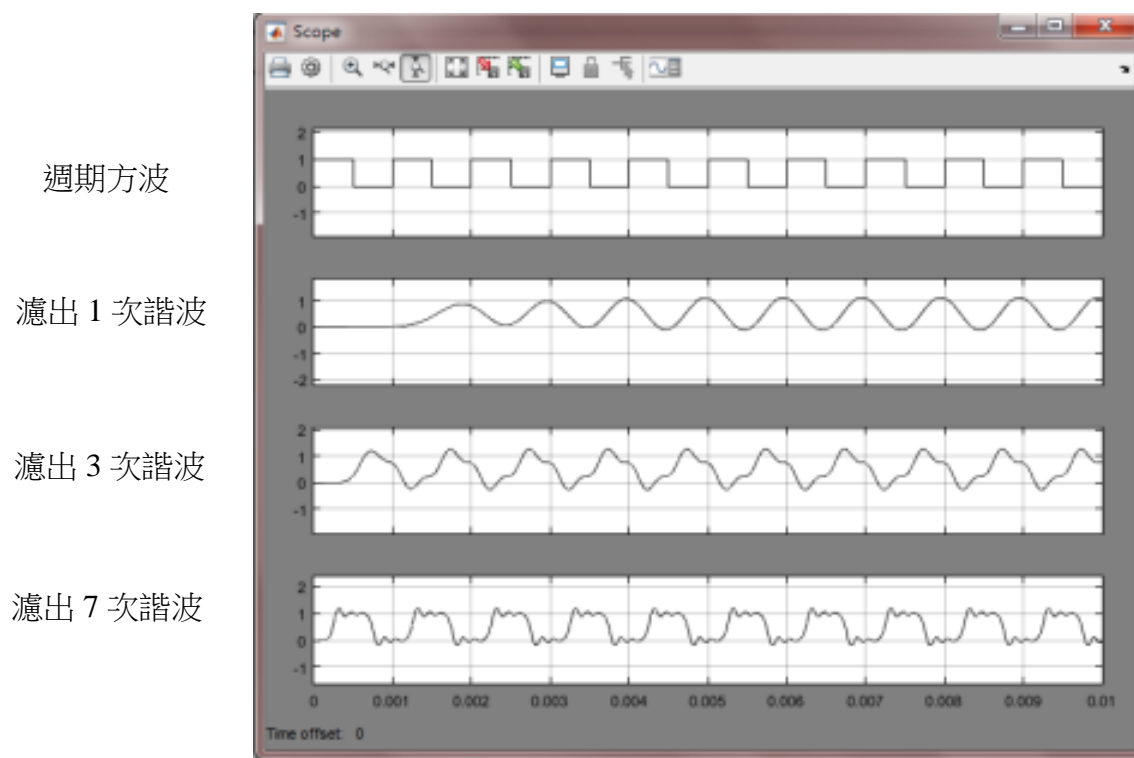
### Step 3：模擬環境設定、存檔與執行模擬

1. 執行時間設定為 0.01 秒，此處的時間為模擬的停止時間。
2. 可以先存檔。
3. 再執行模擬。



### Step 4：進行模擬與結果分析

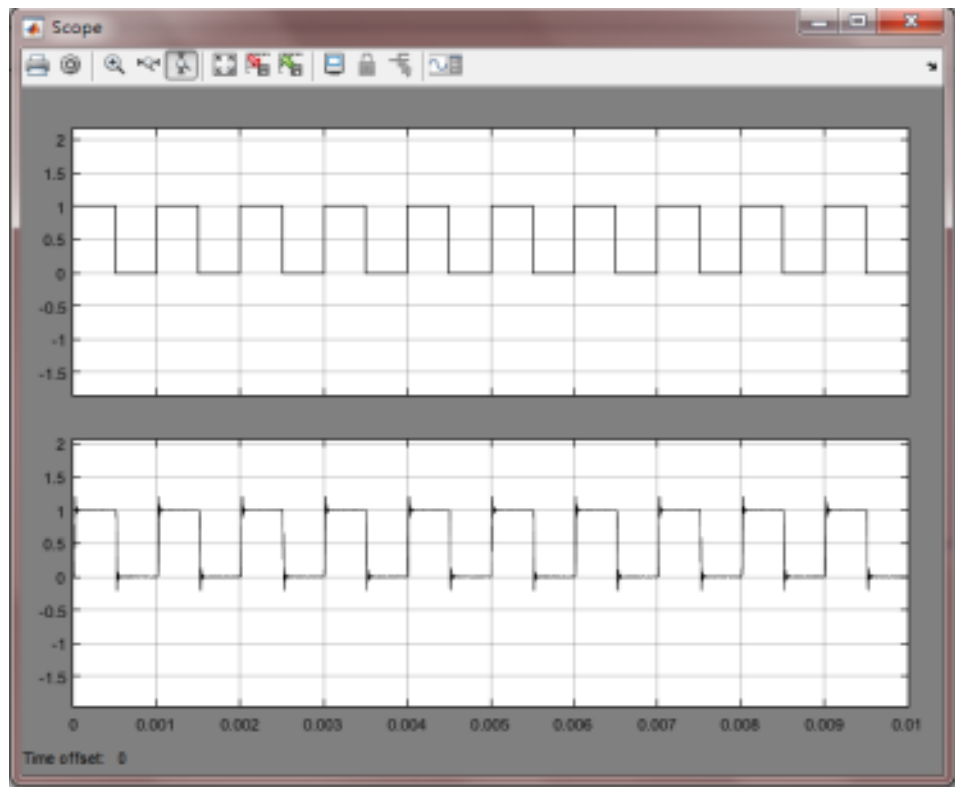
1. 在時域觀察週期方波被濾波器濾出 k 次諧波之情況。



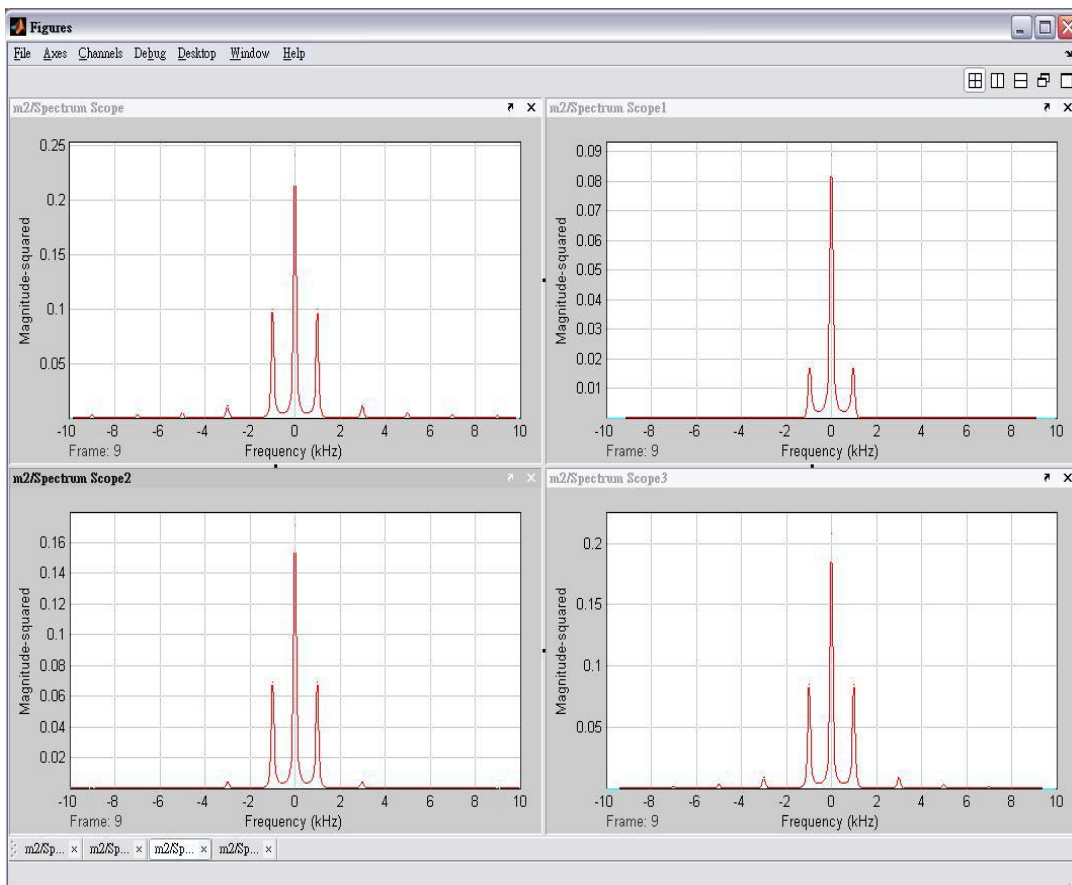
2. 在時域觀察週期方波被濾波器濾出 101 次諧波

週期方波

濾出 101 次諧波



3. 在頻域觀察週期方波被濾波器濾出  $k$  次諧波之情況。



## 1.4 結果與討論

透過本實習可以充分了解方波之時域與頻域特性，同時分析與模擬週期信號的傅利葉級數，可學到週期信號在時域與頻域的特性，本實習可以初步建立頻譜的觀念。

### 參考文獻

- [1] L. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [2] S. Haykin, *Communication System*, John Wiley & Sons, New York, 3rd edition, 1994.
- [3] 余兆棠、文成康、林瑞源、張郁斌、林福林 編著，*無線通訊與網路*，滄海，2006 年 11 月。
- [4] 余兆棠、李志鵬 著，*信號與系統*，滄海，2007 年 1 月。