班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

104-1 微積分期末心得報告

遞增與遞減函數：若值 x 往右增加時，函數的圖形往上移動，則我們稱此函數為遞增(increasing)，反之若值 x 往右增加時，函數的圖形往下移動，則我們稱此函數為遞減(decreasing)。

定義：

若函數 f 對於區間內的任意兩點 x_1 和 x_2 而言，若$x_2 > x_1$，可得 $f(x_2) > f(x_1)$，則函數 f 在該區間為遞增。

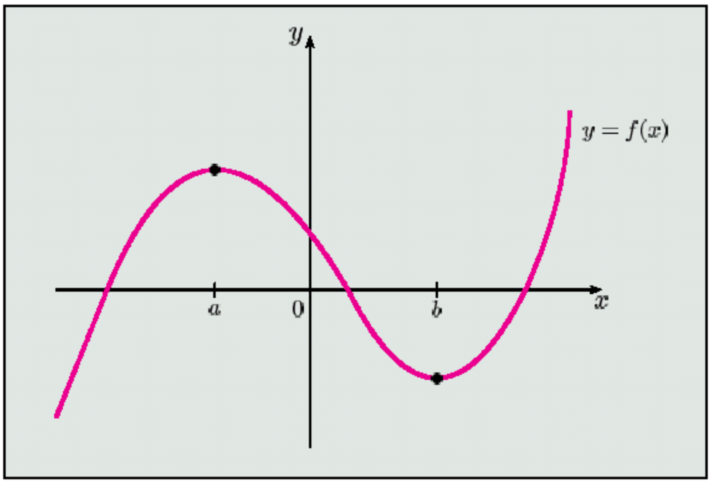
若函數 f 對於區間內的任意兩點 x_1 和 x_2 而言，若$x_2 > x_1$，可得$f(x_2) < f(x_1)$，則函數 f 在該區間為遞減。

- **遞增與遞減函數的檢定法：**

令函數在區間(a,b)為可微分的，則

1. 若對於(a,b)上的所有 x，可得$f'(x) > 0$，則函數 f 在(a,b)為遞增。
2. 若對於(a,b)上的所有 x，可得$f'(x) < 0$，則函數 f 在(a,b)為遞減。
3. 若對於(a,b)上的所有 x，可得$f'(x) = 0$，則函數 f 在(a,b)為常數。

觀察下列圖形，我們發現它的圖形在開區間 (−∞, a) 和 (b, ∞)裡，圖形由左下角往右上角上升(遞增)；在開區間 (a, b) 裡，圖形由左上角往右下角下降(遞減)。



班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **臨界數**：令 f 在 c 點有定義，若 $f'(c)=0$ 或 $f'(c)$ 不存在，則 c 為臨界數。

● **應用遞增或遞減函數檢定法的準則**

(一) 找出定義域。

(二) 計算 f 的導數，找出臨界數，並以這些臨界數來決定檢定區間。(只找出使得 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的所有 x 值。)

(三) 在每個區間上任取一點來檢定 $f'(x)$ 為正值或負值。

(四) 利用函數遞增與遞減的檢定法來判斷 f 在每個區間為遞增或遞減。

以下為例子：

範例 1：

求函數 $f(x)=(x^2-4)^{\frac{2}{3}}$ 為遞增或遞減的開區間。

解：

(一) 找定義域 $(-\infty,\infty)$

(二) 找臨界數

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-4)^{-\frac{1}{3}}\times 2x$$

$$=\frac{4x}{3(x^2-4)^{\frac{1}{3}}}$$

$x=-2,0,2$ 為臨界數

(三)

x	f'	f
$(-\infty,-2)$	－	↓
$(-2,0)$	＋	↑
$(0,2)$	－	↓
$(2,\infty)$	＋	↑

所以，**$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$、$(0,2)$ 遞減**

$f(x)$ 在 $(-2,0)$、$(2,\infty)$ 遞增

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 2：

求函數 $f\,(x) = \frac{x^4+4}{x^2}$ 為遞增或遞減的開區間。

解：

(一)找定義域 (−∞ , ∞)U(0 , ∞)

(二)找臨界數

$$f\,'(x) = \frac{4x^3 \times x^2 - (x^4+1) \times 2x}{x^4} = \frac{2x^5 - 2x}{x^4} = \frac{2(x^4-1)}{x^3}$$

x = -1,1 為臨界數 (0 不在此定義中)

(三)

x	$f\,'$	f
(−∞ , -1)	−	↓
(-1 , 0)	+	↑
(0 , 1)	−	↓
(1 , ∞)	+	↑

所以，**$f\,(x)$ 在(−∞ , -1)、(0 , 1)遞減**

$f\,(x)$ 在(-1 , 0)、(1 , ∞)遞增

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **相對極值：**

令 f 是一個在點 c 有定義的函數，(a , b)為包含點 c 的區間。

1. 若對於(a , b)上的任意點 x，使得 $f(x) \leq f(c)$ ，則 $f(c)$ 為一個**相對極大值**。
2. 若對於(a , b)上的任意點 x，使得 $f(x) \geq f(c)$ ，則 $f(c)$ 為一個**相對極小值**。

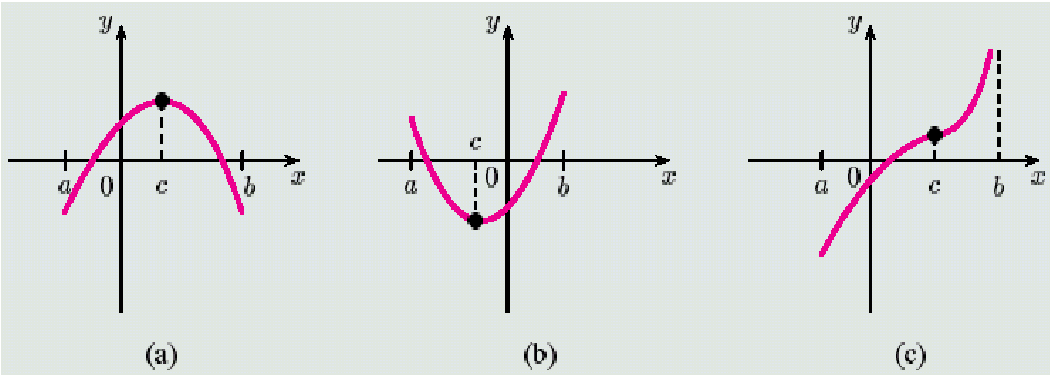
若 $f(c)$為 f 的相對極值，則稱在 $x = c$ 處有相對極值。

➢ **一階導數檢定法：**

(a) 在區間 (a , b) 上，若 $x = c$ 的左邊 $f'(x) > 0$；$x = c$ 的右邊 $f'(x) < 0$，則 $f(x)$ 在 $x = c$ 產生相對極大值。 **(f 由↑變↓)**

(b) 在區間 (a , b) 上，若 $x = c$ 的左邊 $f'(x) < 0$；$x = c$ 的右邊 $f'(x) > 0$，則 $f(x)$ 在 $x = c$ 產生相對極小值。 **(f 由↓變↑)**

(c) 在區間 (a , b) 上，若 $x = c$ 的兩邊 $f'(x)$皆為正或恒為負，則 $f(c)$ 不是 f 的相對極值。



★ **重點整理：**

$f' > 0$ ， f ↑

$f' < 0$ ， f ↓

f ：↑變↓，相對極大值。

**　　↓變↑，相對極小值。**

臨界數 $f'(c) = 0$，$f'(c)$ 不存在。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 3：

求函數 $\boldsymbol{f(x)=2x^3-6x+1}$ 的所有相對極值。

解：

(一) 定義域 $(-\infty,\infty)$

(二) $f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)$

$x=-1,1$ 為臨界數

(三)

x	f‘	f
$(-\infty,-1)$	+	↑
$(-1,1)$	−	↓
$(1,\infty)$	+	↑

$f(-1)$相對極大

$f(1)$相對極小

相對極大值：$\boldsymbol{f(-1)=2\times(-1)^3-6\times(-1)+1=5}$

相對極小值：$\boldsymbol{f(1)=2\times1^3-6\times1+1=-3}$

範例 4：

求函數 $\boldsymbol{f(x)=x^4-4x^3}$ 的所有相對極值。

解：

(四) 定義域 $(-\infty,\infty)$

(五) $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$x=0,3$ 為臨界數

(六)

x	f‘	f
$(-\infty,0)$	−	↓
$(0,3)$	−	↓
$(3,\infty)$	+	↑

相對極小值：$\boldsymbol{f(3)=3^4-4\times3^3=-27}$

範例 4 討論：並非有相對極小值，就一定也會有相對極大值。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **絕對極值：**

令函數 f 在包含 c 點的區間 I 中每一點都有函數值。

1. 對於區間 I 上的任意點 x，使得 $f(\mathrm{c}) \le f(x)$ ，則 $f(\mathrm{c})$ 為函數 f 在 I 上的**絕對極小值**。
2. 對於區間 I 上的任意點 x，使得 $f(\mathrm{c}) \ge f(x)$ ，則 $f(\mathrm{c})$ 為函數 f 在 I 上的**絕對極大值**。

函數在區間的絕對極大值與絕對極小值，常常稱為函數 f 在該區間 I 的極大值與極小值。

（極值定理：若函數 f 在 [a, b] 上連續，則 f 在 [a, b] 上必有極大值和極小值。）

➢ 方法：

(一) 定義域 [a, b]

(二) **在開區間(a, b)中**找臨界數，$f'(a)$、$f'(b)$不存在。在(0 , b)中找臨界數，x = c , d為臨界數。

(三) 比較 $f(a)$、$f'(b)$、$f(\mathrm{c})$、$f'(\mathrm{d})$，最大者為絕對極大值，最小者為絕對極小值。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 5：

(一) 求 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ 在 [-2, 4] 之絕對極值。

解：

在開區間(-2, 4)中，

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3),\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$

$f(-2) = 49,\ \ f(0) = 1,\ \ f(3) = -26,\ \ f(4) = 1$

絕對極大值：$\boldsymbol{f(-2) = 49}$

絕對極小值：$\boldsymbol{f(3) = -26}$

(二)求 $\boldsymbol{f(x) = 2\sqrt{x} - x}$ 在 [0, 16] 之絕對極值。

解：

在開區間(0, 16)中，

$f'(x) = \left(2x^{\frac{1}{2}} - x\right)' = x^{-\frac{1}{2}} - 1$

臨界數 x = 1

$f(0) = 0$，$f(16) = 2\sqrt{16} - 16 = 8 - 16 = -8$，$f(1) = 2 - 1 = 1$

絕對極大值：$\boldsymbol{f(1) = 1}$

絕對極小值：$\boldsymbol{f(16) = -8}$

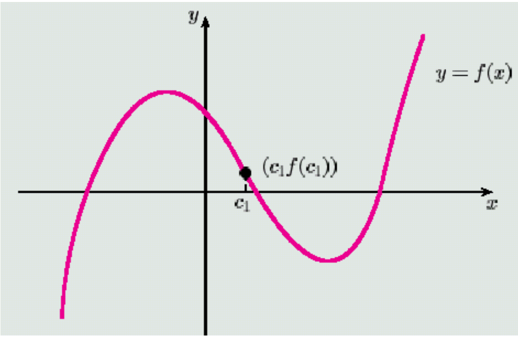
班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

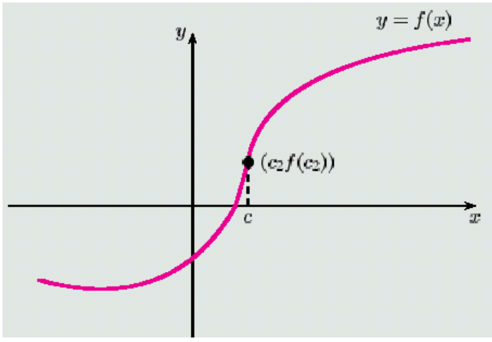
凹性：

- 凹性的檢定法：
  令函數 f 在開區間 I 的二階導數 f'' 存在，
  1. 若對於 I 上的所有 x，$f''(x) > 0$，則 f 凹向上。
  2. 若對於 I 上的所有 x，$f''(x) < 0$，則 f 凹向下。

反曲點：

若 $(c, f(c))$ 為函數 $y = f(x)$ 圖形上的點且改變了函數圖形之凹性，則 $(c, f(c))$ 稱為函數 $y = f(x)$ 之反曲點 (inflection point)。





➢ **二階導數檢定法：**

若$f'(c) = 0$

(a)$f''(c) > 0$ (f 上凹) — $f(c)$相對極小值

(b)$f''(c) < 0$ (f 下凹) — $f(c)$相對極大值

(c)$f''(c) = 0$ — $f(c)$不是極值

班級：財金一甲　　學號：4A480057　　姓名：蔡宛蓁

範例 6：

求$f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$的所有相對極值。

解：

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

臨界數 x = 0 , 3

$f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(0) = 0 \rightarrow f(0)$ 不是極值

$f''(3) = 108 - 72 = 36 > 0 \rightarrow f$：上凹

所以，相對極小值為$f(3) = 91 - 4 \times 27 + 1 = -26$

最佳化問題：

在應用領域裡，常會遇到求某個函數的最佳解，例如：最小成本，最大利潤，最少的工作時間等等。所有這些問題我們統稱為最佳化問題 (optimization problem 或 maximum-minimum problem)。

範例 7：

某人將一邊長為 24 公分之正方形鐵片，由四個角落切去一小正方形構造出一個無頂蓋的長方體鐵盒子，如圖所示。試問如何切除角落的小正方形使其體積最大。

- 解:
$$\begin{aligned} f(x) &= (24-x)(24-x)x \\ &= 4(x^3 - 24x^2 + 144x) \\ f'(x) &= 4(3x^2 - 28x + 144) \\ &= 12(x^2 - 16x + 48) \\ &= 12(x-4)(x-12) \\ f(4) &= 1024 \end{aligned}$$