

微積分期末心得報告

在本學期裡，所學得單元從第二章到第五章裡，讓我深感到興趣的是第三章和第四章；這兩章裡面的運用跟算法，還有能夠拿來算出答案來的題目類型都讓我覺得很有趣。

壹·微分

在第三章裡學的是微分；它能夠運用出導數和圖形斜率、變化率-速度和邊際、乘冪律和商律、高階導數、隱微分和相關變化率…等我在高中所沒見過的用法，讓我大開了眼界阿

高階導數是這個章節裡，讓我感到較特別的一個單元，它能夠不斷地算出導數來，可以從一階導數一直算到 n 階導數，直到無法再算為止。不過簡單地說就是將它微分，然後再算出其導數的意思。

除了高階導數外，還有隱微分這單元也是其讓我感到好玩的地方；它還應用了導數和連鎖率再算題目的隱微分，除此之外，它還能算出圖形的切線斜率。

它們的相關例子為下：

(1) 高階導數：

if $f(x) = x^3 - 7x$ ，則 $f^{(3)}(x)$ 和 $f^{(4)}(x)$ 為？

解法：

$$f'(x) = 3x^2 - 7$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f^{(3)}(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

這題要算出 3 階跟 4 階導數的話，就必須要從一階開始一個一個慢慢微分，直到 4 階算出來為止，這時 3 階的答案和 4 階的答案就能解出來了。

(2) 隱微分：

若 $x^2 + y^2 = 25$ ，(a) 求 $\frac{dy}{dx}$ ，(b) 求此圓上一點(3,4)之切線方程式。

解法：(a) $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}25$$

$$2x^2 + 2y * y' = 0$$

$$=y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

故其切線方程式為 $y - 4 = -\frac{x}{y}(x - 3)$ 。

從以上例題這個答案 $y' = -\frac{x}{y}$ 可以看出隱函數微分的結果通常會保留有 y ，這是與顯函數微分的結果只是 x 的函數形式上不相同之處。不過想想卻是十分合理，一旦找出之顯函數代入，則微分結果立刻變為完全只有 x 之數學式了。

貳·導數的應用

第四章是我目前學過的單元裡覺得最有趣，同時也是最麻煩的一個單元；它運用了前面第二章的極限來算漸近線，也是第三章微分的進階用法，也就是說它是將第二章跟第三章的一部分結合在一起。

它在這一章裡主要是運用在圖形上；在列算式時，有分幾個步驟：

- (一)是先判斷定義域(不先判斷定義域的話，就會影響到後面算式的答案)。
- (二)是算出 x 和 y 有無截距。
- (三)用極限限值算出其是否有鉛直漸近線或水平漸近線。
- (四)用一階導數算出臨界數。
- (五)用二階導數算出其有無反曲點，如果有的話，就會出現 $(x, f(x))$ 這個答案。
- (六)最後再列一個表：

(1)在 x 欄列區間

(2)在 $f'(x)$ 欄算出曲線，某列區間在那欄裡是+或-，如果是+就是遞增，-就是遞減。

(3)在 $f''(x)$ 欄算出凹性，某列區間在那欄裡是+或-，如果是+就是CU，-就是CD。

之後再用 $f(x)$ 算出所有極值，包括絕對極值和相對極值，其中還有分相對極大值和相對極小值跟絕對極大值和絕對極小值。

其相關例題如下：

求 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ 之定義域、截距、漸近線、臨界數、反曲點、凹性跟所有極值。

解:

(一) 定義域: $(-\infty, \infty)$

(二) 截距:(1)由 $f(0) = 5 \rightarrow y$ -截距=5

(2)解 $f(x) = 0 \rightarrow x$ -截距= x

(三) 漸近線: (1)鉛直:無鉛直漸近線

(2)水平: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

無水平漸近線

(四) 臨界數: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$= 3(x^2 + 2x - 3)$

$= 3(x + 3)(x - 1)$

$= -3, 1$ 為臨界數

(五) 反曲點: $f''(x) = 6x + 6$

$= 6(x + 1)$

$x = -1$ 可能有反曲點

(六)列表

x	f'	f''	f	
$(-\infty, -3)$	+	-	↑	CD
$(-3, -1)$	-	-	↓	CD
$(-1, 1)$	-	+	↓	CU
$(1, \infty)$	+	+	↑	CU

(七)算反曲點跟極值

$(-1, 16)$ 為反曲點

$f(-3) = 32$

$f(-1) = 16$

$f(1) = 0$

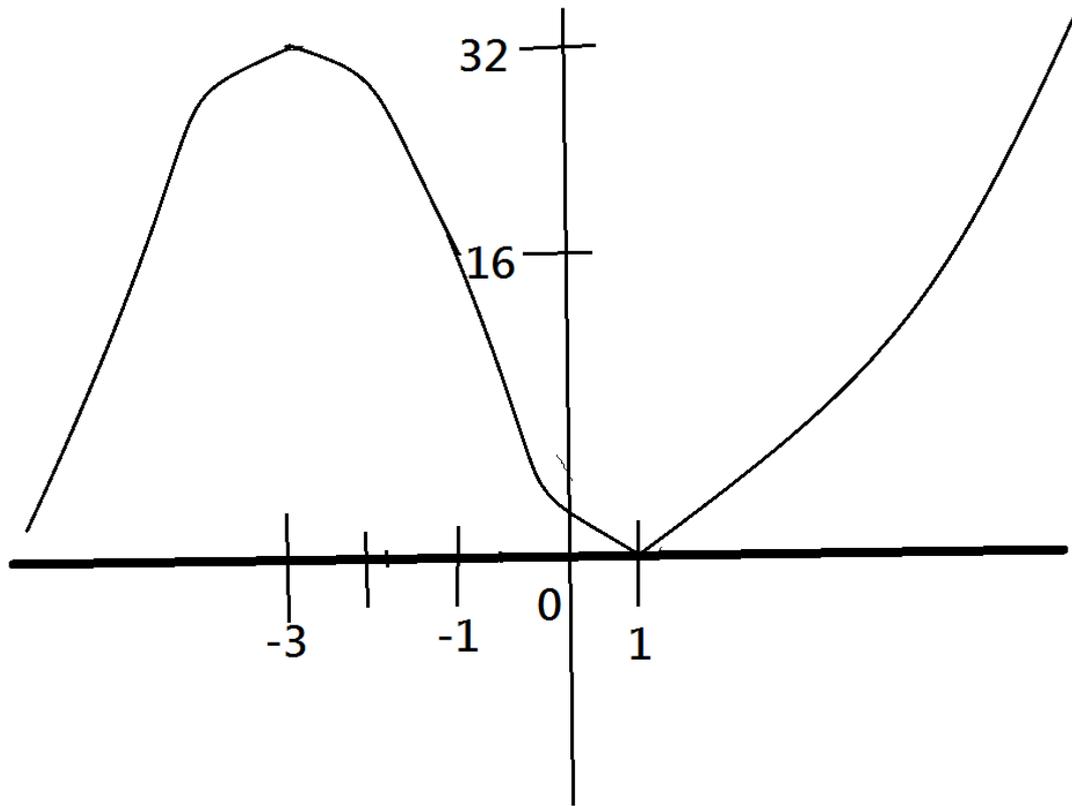
相對極大值為 32

相對極小值為 0

絕對極大值為 32

絕對極小值為 0

(八)繪圖



這個例題要用上面的這 8 個步驟，一個一個解出來，方可得到最完整的答案來，這樣畫圖也會比較好畫。