

期末考微積分心得報告

4A480083 劉家邦

我要介紹的是無理數 e:

1. 證明 e 等於 2.71828 的過程
2. 活用於 e 的例子
3. 舉實際例子

1. 可以使用高中所教過二項式定理作計算,過程如下:

<pf.>

$$\begin{aligned} \Rightarrow e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n C_i^n 1^{n-i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[C_0^n 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_1^n 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_2^n 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_3^n 1^{n-3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + C_n^n 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \times 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \times \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{(n-3)!3!} \times \frac{1}{n^3} + \dots + 1 \times \frac{1}{n^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 1 + \frac{n \times (n-1)}{2n^2} + \frac{n \times (n-1)(n-2)}{3 \times 2n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \right] \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + 0 \\ &= 2.71828\dots \end{aligned}$$

2.e 這個無理數最常被利用的例子就是複利,以下將說明複利跟無理數 e 的關係:

=>假設本金為 1 單位,並以複利的方式計算。

若利率為 100%, 那麼 1 年後本利和為 (1+1)的一次方=2。

若改成半年支付一次利息，則利率減半為 $1/2 \cdot 100\%$ 那麼，1 年後本利和為：

$$(1+1/2)^2=9/4=2.25$$

若改成四個月支付一次利息，則利率變為 $1/3 \cdot 100\%$ 那麼，1 年後本利和為：

$$(1+1/3)^3=64/27 \approx 2.370$$

若改成三個月支付一次利息，則利率變為 $1/4 \cdot 100\%$

那麼，1 年後本利和為： $(1+1/4)^4=625/256 \approx 2.441\dots$

若改成 2 個月支付一次利息，則利率變為 $1/6 \cdot 100\%$

那麼，1 年後本利和為： $(1+1/6)^6=117649/46656 \approx 2.5216$

若改成 1 個月支付一次利息，則利率變為 $1/12 \cdot 100\%$

那麼，1 年後本利和為： $(1+1/12)^{12}=23298085122481/$

$$8916100448256 \approx 2.61$$

若改成每天支付一次利息，則利率變為 $1/365 \cdot 100\%$

那麼，1 年後本利和為： $(1+1/365)^{365}=2.714567$

若改成每小時支付一次利息，則利率變為 $1/8760 \cdot 100\%$

那麼，1 年後本利和為： $(1+1/8760)^{8760}=2.718727$

※※※ 總結，當利率變成原本的 $1/n$ ，支付次數變成 n 次，則 1 年後本利和

為： $(1+1/n)^n$ 的 n 次方。如此，我們可得到一個數列 $\langle 1+1/n \rangle$ 的 n 次方，而就上

述幾個數據可以得到一個性質，也就是會越來越接近某一個數值，在接下來的舉

利中可以證明此事。

3.我要舉的實際例子是在課本 5.2 的 5.9 頁，

題目如下:以 \$ 1000 元的存款並且年利率為 8% 為例,

若

複利次數為 1 次,所得到的餘額為 1080 元

複利次數為 2 次,所得到的餘額為 1081.6 元

複利次數為 4 次,所得到的餘額為 1082.43 元

複利次數為 12 次,所得到的餘額為 1083 元

複利次數為 365 次,所得到的餘額為 1083.28 元

=>從上述幾個式子可以發掘一件事情,當複利次數越多次的時候,餘額的數字

會特別靠近 1083 元這個數值。

最後,感謝老師如此用心的批改,辛苦了

