班級：財金一甲　　學號：4A40H049　　姓名：林逸庭

104-2 微積分 期中心得報告

指數函數的定義：

設 a > 0 且 a≠1，則以 a 為底的指數函數，定義為 **f(x)=** $\boldsymbol{a^x}$。

在定義中排除以 a=1 為底，因為 f(x)= 1^x=1 為常數函數非指數函數。

自然指數函數的導數：

令 u 為 x 的可微分函數

$$\textbf{1.}\quad \frac{d}{dx}[e^x]=e^x \qquad\qquad \textbf{2.}\quad \frac{d}{dx}[e^u]=e^u\frac{du}{dx}。$$

範例一：指數函數的導數。 $$f(x)=\frac{e^x}{x}$$ **解**　$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\frac{x\,e^x-e^x(1)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ #

討論範例一：計算兩個可微函數的商的導數時，可以先使用商律微分，記住 **e^x的導數等於本身**，最後再化簡。

自然對數函數的定義：

記為 ln x，定義為 ln x = b 若且唯若 e^b= x。ln x = log e^x，ln x =b↔ e^b= x。

對數函數的導數：

令 u 為 x 的可微分函數

$$\textbf{1.}\ \frac{d}{dx}[\ln x]=\frac{1}{x} \qquad\qquad \textbf{2.}\quad \frac{d}{dx}[\ln u]=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

對數的性質：

1. ln x · y = ln x+ ln y　　2. ln$\frac{x}{y}$ = ln x- ln y　　3. ln$\boldsymbol{a^x}$ = a ln x

範例二：對數函數的導數。 $$y=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$$ **解**　$y=\ln\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{1}{3}[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$ $=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]=\frac{2}{3(x^2-1)}$ #

班級：財金一甲　　學號：4A40H049　　姓名：林逸庭

討論範例二：應用對數性質 **ln$\boldsymbol{a^x}$ = a ln x** 及 **ln$\boldsymbol{\frac{x}{y}}$ = ln x- ln y** 化簡，微分公式

$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$**[ln u]=** $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}}\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}$，[ln(x-1)- ln(x+1)]微分得 $[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}]$，最後與$\frac{1}{3}$相乘。

由兩定義可知，自然指數函數與自然對數函數互為反函數，所以指數方程式可寫成對數方程式的形式，對數方程式也可寫成指數方程式的形式。

對數與指數函數互為反函數的性質：

1. ln $\boldsymbol{e^x}$= x　x 的範圍? $-\infty < x < \infty$　　**2. $\boldsymbol{e^{\ln x}}$ = x　x 的範圍?** x > 0

範例三：解指數、對數方程式。

①.5+ $e^{0.2x}$ =10　　②.3+2 ln x =7

解① $e^{0.2x}$=10-5
$e^{0.2x}$=5
=>ln $e^{0.2x}$ =ln5 **(等號兩邊取自然對數)**
=>0.2x= ln5
=>x=5 ln 5$_{\#}$

②2 ln x=7-3
2 ln x =4
ln x = 2
=> $\boldsymbol{e^{lnx}}$ **=$\boldsymbol{e^2}$ (等號兩邊化為指數)**
=>x=$\boldsymbol{e^2}_{\#}$

討論範例三：**求解指數方程式**，首先將指數移到等號的一邊，在對**等號兩邊取對數**，就可解出變數；**求解對數方程式**亦同，在**等號兩邊取指數**，即可解出變數。

請問$(\boldsymbol{x^2+1})^{\boldsymbol{5x}}$如何微分?

解　**f(x) =$(\boldsymbol{x^2+1})^{\boldsymbol{5x}}$**

ln f(x)=>5x ln $(\boldsymbol{x^2+1})$

$\frac{\boldsymbol{f(x)\prime}}{\boldsymbol{f(x)}}$ **=>5 ln $(\boldsymbol{x^2+1})$+$\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2+1}}$** · 5x

f(x) ′=[5 ln $(\boldsymbol{x^2+1})$+($\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{x^2+1}}$) · 5x] · $(\boldsymbol{x^2+1})^{\boldsymbol{5x}}{}_{\#}$