

## 4A480092 潘鈺文 財金一甲

積分是微積分學與數學分析裡的一個核心概念，通常分為**定積分**和**不定積分**兩種。

|    | 不定積分   | 定積分   |
|----|--|---|
| 定義 | 已知 $F(x)$ 為 $f(x)$ 之原函數或反導數，則所有原函數或反導函數所成之集合稱之為不定積分。 | 令 $f$ 在閉區間 $[a, b]$ 為非負且連續的函數，則 $f$ 圖形、 $x$ 軸、直線 $x=a$ 與直線 $x=b$ 所圍成區域的面積表示為<br>$\int_a^b f(x)dx$ |
| 差異 | $\int f(x)dx$<br>表示一個 <b>函數值</b>                     | $\int_a^b f(x)dx$<br>表示一個 <b>數值</b>   |

### 不定積分例題

Ex(1):

$$\begin{aligned} & \int (x^3 - x + 2)dx \\ &= \int x^3 dx - \int x dx + \int 2 dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x + C \end{aligned}$$

Ex(2):

$$\int x\sqrt{x^2 - 1} dx$$

令  $u=x^2 - 1$ ，則  $du=2x dx$ ，為了製造  $2x dx$ ，將  $\frac{1}{2}$  提出來

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 - 1} dx &= \frac{1}{2} \int (x^2 - 1)^{1/2} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{2} * \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{3/2} + C$$

Ex(3):

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} dx$$

令  $u=1+e^{3x}$ ，則  $du = 3e^{3x}dx$ ，為了製造  $3e^{3x}dx$ ，提出  $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+e^{3x}} 3x dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{3} \ln|u| + c \\ &= \frac{1}{3} \ln(1 + e^{3x}) + c \end{aligned}$$

定積分例題:

Ex(1):

$$\int_0^1 -x^2 - x + 2 dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 -x^2 - x + 2 dx \\ &= \left( -\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Ex(2):

$$\int_{-2}^4 |x| dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\int_{-2}^4 |x| dx = \int_{-2}^0 |x| dx + \int_0^4 |x| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^4 \\ &= 0 - \left[-\frac{1}{2} \times (-2)^2\right] + \left(\frac{1}{2} \times 4^2 - 0\right) \\ &= 2 + 8 = 10 \end{aligned}$$

Ex(3)

$$\int_{-2}^3 (x - 3x^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^3 (x - 3x^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 - x^3\right) \Big|_{-2}^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - 27\right) - [2 - (-8)] \\ &= -\frac{65}{2} \end{aligned}$$