班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

104-2 微積分期中心得報告

★ **指數函數**：指數函數是形式為 b^x 的數學函數；當中 "b" 是底數（或稱「基數」，英文是 base），而 "x" 是指數（英文 index 或 exponent）。

(一) 定義：

若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，則以 a 為底的指數函數，定義為 $f(x) = a^x$。

(二) 指數的性質：

1. $a^0 = 1$
2. $a^x a^y = a^{x+y}$
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$
7. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

★ **自然指數函數**：以 e 為底數的指數函數（即e^x）；此為數學中重要的函數，也可寫作$\exp(x)$。無理數 e 近似等於2.71828182846，還叫做歐拉數。

(一) e 的極限定義：

無理數 e 可定義為：當 $x \to 0$，$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的極限。

表示為：

$$e = \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828\,1828\,459045\,23536\cdots$$

(二) 指數特性：

1. $e^0 = 1$
2. $e^x e^y = e^{x+y}$
3. $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
4. $(e^x)^y = e^{xy}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ 指數函數的導數：

若 u 為 x 的函數，則可用連鎖率來求 e^u 對 x 的導數，公式總結如：

令 u 為 x 的可微分函數。

1. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	2. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \frac{du}{dx}$

以下為例子：

範例 1 ：

求函數 $f(x) = e^{2x}$ 為遞增或遞減的開區間。

解：

a. 令 $u = 2x$，則 $\frac{du}{dx} = 2$

$$f'(x) = e^u \frac{du}{dx} = e^{2x}(2) = 2e^{2x}$$

範例 2：

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

解：

$$\frac{e^x x^2 - e^x(2x)}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

重點公式：

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \times \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)} \times \frac{d}{dx}(f(x))$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **對數函數：**

- **對數函數：**

(a) 對數函數之定義：

$$y = \log_a x;\quad D = \{x > 0\} \rightarrow \{y \in R\}$$

(b) 對數特性：

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^y) = y \log_a x$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

➢ 自然對數的函數：

(a) 自然對數函數(natural logarithmic function)的定義：

記為 $\ln x$ (讀作「x 的自然對數」)，定義為 $\ln x = b$ 若且唯若 $e^b = x$。

由定義得知，自然指數函數與自然對數函數互為反函數。

舉例：

$\ln x = 0$	$e^0 = 1$
$\ln e = 1$	$e^1 = e$
$\ln \frac{1}{e} = -1$	$e^{-1} = \frac{1}{e}$
$\ln 2 \approx 0.693$	$e^{0.693} \approx 2$
$\ln 0.1 \approx -2.303$	$e^{-2.303} \approx 0.1$

(b) 對數函數與指數函數互為反函數的性質：

反函數性質為：$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ 和 $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$。

利用自然對數函數與自然指數函數互為反函數的性質得下面公式：

$\boldsymbol{\ln e^x = x}$ 和 $\boldsymbol{e^{\ln x} = x}$

(c) 對數的性質：

- $\ln 1 = 0$
- $\ln xy = \ln x + \ln y$
- $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $\ln x^n = n \ln x$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例３：
利用對數的性質來展開下列各式成對數的和、差、成績。

(a) $\ln \frac{2}{7y^2}$

(b) $\ln x(\sqrt[3]{x+3})$

(c) $4\ln x + 3\ln y$

(d) $\ln(x+1) - 3\ln(x+2)$

解：

(a) $\ln \frac{2}{7y^2} = \ln 2 - \ln(7y^2) = \mathbf{\ln 2 - \ln 7 - 2\ln y}$

(b) $\ln x(\sqrt[3]{x+3}) = \mathbf{\ln x + \frac{1}{3}\ln(x+3)}$

(c) $4\ln x + 3\ln y = \ln x^4 + \ln y^3 = \mathbf{\ln x^4 y^3}$

(d) $\ln(x+1) - 3\ln(x+2) = \ln(x+1) - \ln(x+2)^3 = \mathbf{\ln \frac{x+1}{(x+2)^3}}$

範例３討論：雖然 $\ln xy = \ln x + \ln y$ ，但是 $\ln(x+y)$ 無法改寫或化簡，明確地說：**$\ln(x+y)$ 並不等於 $\ln x + \ln y$** ！

範例４：
解下列方程式。

(a) $\ln x = 4$

(b) $4 + 5\ln x = 19$

解：

(a) $\ln x = 4$

$\to e^{\ln 4} = e^4$

$\to \mathbf{x = e^4}$

(b) $4 + 5\ln x = 19$

$\to 5\ln x = 15$

$\to \ln x = 3$

$\to e^{\ln x} = e^3$

$\to \mathbf{x = e^3}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **對數函數的導數：**

利用隱含數的微分技巧計算自然對數函數的導數。

$$y = \ln x \quad \text{自然對數含數}$$

$$e^y = e^{\ln x} = x \quad \text{寫成指數形式}$$

$$\frac{d}{dx}[e^y] = \frac{d}{dx}[x] \quad \text{對}x\text{微分}$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{連鎖律}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} \quad \text{等號兩邊同除以}e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{以}x\text{代入}e^y$$

➢ 自然對數函數的導數：

令 u 為 x 的可微分函數。

1. $\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$

2. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$

★ 重點公式：

- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = x^{-1} = \frac{1}{x}$
- $[\ln(f(x))]' = \frac{1}{f(x)} \times f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 5 ：

(a) $\boldsymbol{f(x) = \ln 2x}$ **的導數。**

(b) $\boldsymbol{f(x) = \ln 8x}$ **的導數。**

解：

(a) $(\ln 2x)' = \frac{1}{2x} \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$

(b) $(\ln 8x)' = \frac{1}{8x} \times 8 = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$

範例 5 討論：由此兩題可得 $a > \mathbf{0}\,,(\ln \boldsymbol{ax})' = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$ 。

範例 6 ：

(a) $\boldsymbol{f(x) = \ln(x^2 - 4)}$ **的導數。**

(b) $\boldsymbol{f(x) = x^2 \ln x}$ **的導數。**

(c) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{\ln x}{x^2}}$ **的導數。**

解：

(a) $f'(x) = \boldsymbol{\frac{2x}{x^2-4}}$

(b) $f'(x) = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2\mathrm{x} \ln x + x = \boldsymbol{x(2\ln x + 1)}$

(c) $f'(x) = -\left[\frac{\frac{1}{x}x^2-(\ln x)\times 2x}{x^4}\right] = -\left[\frac{x-2x\ln x}{x^4}\right] = -\left[\frac{1-2\ln x}{x^3}\right] = \boldsymbol{\frac{2\ln x - 1}{x^3}}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例7：

$\ln\left(\sqrt{x+1}\right)$ 的導數。

解：

$$\left[\ln\left(\sqrt{x+1}\right)\right]' = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\sqrt{x+1}} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} = \boldsymbol{\frac{1}{2(x+1)}}$$

範例7討論：另一作法，也可以先將 $\ln\left(\sqrt{x+1}\right) = \ln\left((x+1)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(x+1)$ 再進行運算，最後結果一樣可得 $\left[\ln\left(\sqrt{x+1}\right)\right]' = \frac{1}{2(x+1)}$ 。

範例8：

$\mathbf{y} = \frac{(x^2+x+1)^{98}}{\sqrt{2x-x^3}\times e^x}$ 的導數。

解：

$$\ln \mathrm{y} = \ln\frac{(x^2+x+1)^{98}}{\sqrt{2x-x^3}\times e^x} = 98\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x-x^3) - \ln(e^x)$$

$$= \ln\frac{(x^2+x+1)^{98}}{\sqrt{2x-x^3}\times e^x} = 98\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x-x^3) - x$$

$$\frac{y'}{y} = 99\times\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\times\frac{2-3x^2}{2x-x^3} - 1$$

$$\mathbf{y}' = \boldsymbol{\frac{(x^2+x+1)^{98}}{\sqrt{2x-x^3}\times e^x}\times\left[99\times\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2-3x^2}{2(2x-x^3)} - 1\right]}$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例９：

$\boldsymbol{f(x) = \ln\left(x^2\sqrt{x^2+1}\right)}$ **的導數。**

解：

$f(x) = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} = \boldsymbol{\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+1}}$

範例１０：

求函數 $\boldsymbol{f(x) = 7\ln x}$ **圖形在點** $\boldsymbol{(1, 0)}$ **上的切線方程式。**

解：

$f'(x) = \frac{7}{x}$

$f'(1) = 7$

切線方程式：$\boldsymbol{y = 7(x-1)}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例１１：

求 $f(x) = x - 2\ln x$ 相對極值。

解：

(一)定義域 (0 , ∞)

(二)漸近線 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$

$X = 0$ 為鉛直漸近線

無水平漸近線

(三)一次微分

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

臨界數：$x = 2$

(四)二次微分

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} > 0$$

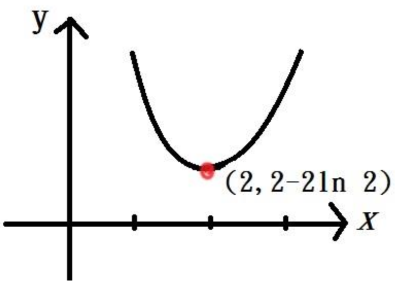
無反曲點

(五)

x	f'	f''	f
(0 , 2)	－	＋	↓ CU
(2 , ∞)	＋	＋	↑ CU

$f(2) = 2 - 2\ln 2$ 為極小值。

(六)圖形



班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ 不同底數

一般指數函數，也就是定義 $f(x) = a^x$ ，

其中 a > 0 且 a ≠ 1。其所對應的以 a 為底的對數可定義為 $\log_a x = b$ 若且唯若 $a^b = x$ 與自然對數函數相同，以 a 為底的對數函數的定義域為所有正數。

➢ 換底公式：

不同底數的對數可以換底公式來求值。

$$\mathbf{(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

➢ 不同底數微分：

令 u 為 x 的可微分函數。

1. $\frac{d}{dx}[a^x] = (\ln a)a^x = a^x \ln a$

2. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u \frac{du}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}[\log_a x] = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$

4. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \left(\frac{1}{\ln a}\right)\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dx}$

範例１２：

求 $\mathbf{y = 2^x}$ 的導數。

解：

(方法一)

$\ln y = \ln 2^x = x\ln 2$

$\frac{y'}{y} = \ln 2$

$y' = y\ln 2 = \mathbf{2^x \ln 2}$

(方法二)

$e^{\ln x} = x, x > 0$

$x = e^{\ln x} \to 2 = e^{\ln 2}$

$2^x = \left(e^{\ln 2}\right)^x$

$y = 2^x = e^{x\ln 2}$

$y' = (2^x)' = e^{x\ln 2}\cdot(x\ln 2)' = \mathbf{2^x \ln 2}$

範例１２討論：透過兩種方式所得結果皆一樣，可推得 $\mathbf{(a^x)' = a^x \ln a}$ 。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例１３：

求 $\boldsymbol{x^x}$ 的導數。

解：

(方法一)

$\ln \mathrm{y} = \ln x^x = x \ln x$

$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x$

$\boldsymbol{y' = x^x \ln(x+1)}$

(方法二)

$x = e^{\ln x}$

$(x^{\mathrm{x}})' = \left[\left(e^{\ln x}\right)^x\right]' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{\mathrm{x}\ln x}(x \ln x)' = \boldsymbol{x^x \ln(x+1)}$

範例１４：

求 $\boldsymbol{\ln(x) = 4^{5x-3}}$ 的導數。

解：

$\ln[h(x)] = \ln 4^{(5x-3)} = (5x-3)\ln 4$

$\frac{h'(x)}{h(x)} = 5\ln 4$

$h'(x) = \boldsymbol{4^{5x-3}(5\ln 4)}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例１５：

求 $\boldsymbol{f(x) = 5^x}$ 的二階導數。

解：

令 $y = f(x)$。

$\ln \mathrm{y} = \ln 5^x = x \ln 5$

$\frac{\mathrm{y}'}{y} = \ln 5$

$\mathrm{y}' = 5^x \ln 5$

$\ln \mathrm{y}' = \ln(5^x \ln 5)$

$\frac{\mathrm{y}''}{y'} = \ln 5$

$\mathrm{y}'' = 5^x \ln 5\,(\ln 5) = \boldsymbol{(\ln 5)^2 \cdot 5^x}$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

➢ 羅必達法則：

羅必達法則（l'Hôpital's rule）是利用導數來計算具有不定型的極限的方法。這法則是由瑞士數學家約翰·伯努利（Johann Bernoulli）所發現的，因此也被叫作伯努利法則（Bernoulli's rule）。

羅必達法則適用於各種不定式極限，以下首先敘述 $\frac{0}{0}$ 型不定式極限相關的羅必達法則。$\frac{0}{0}$型不定式是指這樣一種函數的極限：這個函數可以寫成兩個函數f(x)與F(x)的比值，而這兩個函數同時趨向於 0。羅比達法則可以將這種不定式極限轉化為另一個極限。

如果：

1. 當$x \to a$時，函數 $f(x)$與 $F(x)$都趨於零；
2. 在點 a 的某去心鄰域內，$f'(x)$及 $F'(x)$都存在，且$F'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或為無窮大），

那麼 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$

如果：

1. 當$x \to \infty$時，函數 f(x)與 F(x)都趨於零；
2. 在$|x| > N$時，$f'(x)$及$F'(x)$都存在，且$F'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或為無窮大），

那麼 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$

這兩個形式的差別僅僅在於自變量趨向極限的方式。總的來說，$\frac{0}{0}$型不定式極限的羅必達法則告訴我們，這個極限，等於將分子函數和分母函數各自求導之後，其比值的極限。 對於其他的一些不定式極限，可以將其轉化為$\frac{0}{0}$型不定式極限，然後應用羅必達法則。比如$\frac{\infty}{\infty}$型不定式極限，可以轉化如下：

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}.$$

$0.\infty$ 型不定式極限，可以轉化如下：

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}.$$

$\infty.-\infty$ 型不定式極限，可以轉化如下：

$$\infty - \infty' = \frac{1}{0} - \frac{1}{0'} = \frac{0' - 0}{0 \cdot 0'}.$$

0^0 型不定式極限，可以轉化如下：

$$0^0 = 0 \div 0 = \frac{0}{0}.$$

範例１６：

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{\cos x}$$

$$= \frac{-2\cos 0 + 8\cos 0}{\cos 0}$$

$$= 6$$