班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

104-2 微積分期末心得報告

★ 反導數：

已知單變數函數 $y = f(x)$，微分得：$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ 。

其中 *f(x)* 為可微分之函數，則反導數之定義：現在微分後函數 *f(x)* 為已知函數，亦即 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$， 其中反過來求微分前之函數 *F(x)* ，稱為 *f(x)* 之原函數或反導數、反微分。

★ 不定積分：

反微分的過程並不只是找到單一函數而已，而是找到整個函數族，其成員之間只相差一常數。

計算反微分的過稱也稱為積分(integration)，記作 $\int$ 積分符號。

$\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的不定積分(indefinite integral)，代表 $f(x)$ 的整個反導數族，亦即對所有的 x 。若 $F'(x) = f(x)$ 為真，即可寫成：

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$$

其中 $f(x)$ 為積分函數，dx 代表微分，$F(x) + C$ 為反導數，而當中的 C 為積分常數 (constant of integration)。
另外，不定積分的微分 dx 可辨識出積分的變數； 即符號 $\int f(x)dx$ 的意義為「f 對 x 的反導數」。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **求反導數：**

積分與微分互為反運算的性質可以符號表示：

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

→微分為積分的反運算。

$f(x)$ 求反導數，在對 x 微分，可還原為自己。

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

→積分為微分的反運算。

$f(x)$ 先微分，再作積分，所得結果不一定還原為自己。

基本積分法則：

1. $\int f(x)dx = kx + C$ ， k 是一常數
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
3. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int[f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$ ， $n \neq 1$

以下為例子：

範例 1 ：

(a) $\int \mathbf{4\ dx}$

(b) $\int \mathbf{2x\ dx}$

解：

(a) $\int 4\ dx = 4x + C$

(b) $\int 2x\ dx = 2\int x\ dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + C = x^2 + C$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例 2：

(a) $\int \boldsymbol{5x^{3}dx}$

(b) $\int \boldsymbol{\frac{1}{x^2}\ dx}$

(c) $\int \boldsymbol{(x+5)\ dx}$

解：

(a) $\int 5x^3\ dx = 5\int x^3\ dx = 5 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{5}{4}x^4 + C$

(b) $\int \frac{1}{x^2}\ dx = \int x^{-2}\ dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -1 \times x^{-1} + C = \frac{-1}{x} + C$

(c) $\int (x+5)\ dx = \frac{x^2}{2} + 5x + C$

範例 2 討論：驗算

(a) $\left(\frac{5}{4}x^4\right)' = \frac{5}{4} \times 4x^3 = 5x^3$

(b) $\left(\frac{-1}{x}\right)' = (-1 \times x^{-1})' = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

(c) $\left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)' = x + 5$

範例 3：

$$\int \boldsymbol{\frac{x^2+3x}{\sqrt[4]{x}} dx}$$

解：

$\rightarrow \int \left(\frac{x^2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3x}{\sqrt[4]{x}}\right)\ dx = \int \left(x^{\frac{7}{4}} + x^{\frac{3}{4}}\right) dx$

$$= \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} + 3 \times \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例４：

求 $F'(x) = 4x + 2$ 的通解，再求滿足起始條件 F(1) ＝ 8 的特解。

解：

通解：$\int F'(x)\,dx = \int (4x + 2)dx = 2x^2 + 2x + C$

特解：$F(1) = 2 + 2 + C = 8$

C = 4

所以特解為 $F(x) = 2x^2 + 2x + 4$

範例４討論：

方程式 $y = \int f(x)\,dx$ 有許多解，每個解之間也只有常數的不同。這說明 f 的任意兩個反導數的圖形是互為垂直平移的圖形。

一個 x、y 的**微分方程** (differential equation) 中包含 x、y 和 y 的導數，例如：$dy/dx = 4x + 2$ 的**通解** (general solution) 為 $F(x) = 2x^2 + 2x + C$。

在許多積分的應用中，足夠的給定條件可求出**特解** (particular solution)，藉由知道某個 x 的 $F(x)$ 值就行 [這條件稱為**起始條件**(initial condition)]。

班級：財金一甲　　學號：4A480057　　姓名：蔡宛蓁

★ 廣義乘冪律與替代法的積分：

➢ 基本乘冪律：

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{，} n \neq -1$$

➢ 積分的廣義乘冪律：

若 u 為 x 的可微函數，則

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{，} n \neq -1$$

➢ 替代法：

若積分函數較為複雜，就很難應用廣義乘冪律這樣的基本積分公式，此時可使用另一種積分技巧，即替代法(substitutions) 或變數變換法 (change of variables)。此法將改寫積分為 u 和 du，也就是說：令 $u = f(x)$ 時，則 $du = f'(x)\,dx$，而且廣義乘冪律的形式為 $\int u^n \frac{du}{dx} dx = \int u^n \, du$。

範例５：

(a) $\int 3(3x-1)^4 dx$

(b) $\int 2x\sqrt{x^2-2}\,dx$

(c) $\int (x^2-6x)^4(x-3)\,dx$

解：

(a) 令 $u = 3x-1$，$du = 3dx$ 代入

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + \mathrm{C} = \frac{(3x-1)^5}{5} + \mathrm{C}$$

(b) 令 $u = x^2 - 2$，$du = 2x\,dx$

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(c) 令 $u = x^2 - 6x$，$du = (2x-6)dx$，$\frac{du}{2} = (x-3)\,dx$

$$\frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{(x^2-6x)^5}{10} + C$$

範例６：

(a) $\int \sqrt[5]{1-2x}\,dx$

(b) $\int x^5\sqrt[5]{3x^3+1}\,dx$

解：

(a) 令 $u=1-2x$，$du=-2\,dx$，$\frac{du}{-2}=dx$ 代入

$$\int (1-2x)^{\frac{1}{5}}dx=-\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{5}}\,du=-\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}}+C$$

$$=-\frac{5}{12}(1-2x)^{\frac{6}{5}}+C$$

(b) 令 $u=3x^3+1$，$du=9x^2\,dx$，$\frac{du}{9}=x^2\,dx$，$x^3=\frac{u-1}{3}$ 代入

$$\int x^3\times x^2\times\sqrt[5]{3x^3+1}\,dx=\frac{1}{9}\int\frac{u-1}{3}\times u^{\frac{1}{5}}\,du$$

$$=\frac{1}{27}\int(u-1)\times u^{\frac{1}{5}}\,du=\frac{1}{27}\int\left(u^{\frac{6}{5}}-u^{\frac{1}{5}}\right)du$$

$$=\frac{1}{27}\times\left[\frac{5}{11}u^{\frac{11}{5}}-\frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}})\right]+C$$

$$=\frac{1}{27}\times\left[\frac{5}{11}(3x^3+1)^{\frac{11}{5}}-\frac{5}{6}(3x^3+1)^{\frac{6}{5}}\right]+C$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **指數與對數的積分：**

➢ 指數函數的積分法則：

令 u 為 x 的可微函數，則

(a) 簡單指數律：

$$\int e^{x} dx = e^{x} + C$$

此因，$\frac{d}{dx}(e^{x}) = e^{x}$，根據不定積分定義而得證。

(b) 廣義指數律：

$$\int e^{x} \frac{du}{dx} dx = \int e^{x} du = e^{u} + C$$

範例７：

(a) $\int (e^{x} + x) dx$

(b) $\int e^{2x+5} dx$

(c) $\int 6xe^{-x^2} dx$

解：

(a) $\int (e^{x} + x) dx = \int e^{x} dx + \int x\, dx = e^{x} + \frac{x^2}{2} + C$

(b) 令 $u = 2x + 5$，$du = 2\, dx$，$\frac{du}{2} = dx$ 代入

$$\frac{1}{2}\int e^{u}\, du = \frac{1}{2} \times e^{u} + C = \frac{1}{2} e^{2x+5} + C$$

(c) 令 $u = -x^2$，$du = -2x\, dx$，$\frac{du}{-2} = x\, dx$ 代入

$$6\int xe^{-x^2}\, dx = \frac{6}{-2}\int e^{u}\, du = -3e^{u} + C = -3e^{-x^2} + C$$

範例７討論：在積分時不可在積分函數中引入變數。譬如(c)小題，若欲求$\int e^{x^2} dx$時，同乘除以 $2x$ 之後再將 $1/(2x)$ 提出積分符號外是錯的。亦即

$\int e^{x^2} dx \neq \frac{1}{2x} \int e^{x^2}(2x) dx$ 。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

➢ 對數函數的積分法則：

令 u 為 x 的可微函數，則

(a) 簡單對數律：

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$，$x \neq 0$

當 $x > 0$時，$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

當 $x < 0$時，$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \times (-x)' = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}$

故當 $x \neq 0$ 時，不管是 $x > 0$ 或是 $x < 0$，$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$。

(b) 廣義對數律：

$$\int \frac{du/dx}{u} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

範例８：

(a) $\int \frac{4}{4x+1} dx$

(b) $\int \frac{5x}{x^2+1} dx$

解：

(a) 令 $u = 4x + 1$，$du = 4\,dx$ 代入

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|4x + 1| + C$$

(b) 令 $u = x^2 + 1$，$du = 2x\,dx$，$\frac{du}{2} = x\,dx$ 代入

$$5\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = 5\int \frac{1}{u} du = \frac{5}{2}\ln|u| + C$$

$$= \frac{5}{2}\ln|x^2 + 1| + C = \frac{5}{2}\ln(x^2 + 1) + C$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例９：

(a) $\int \frac{5x^2-3x+2}{x^2} dx$

(b) $\int \frac{3}{e^{-x}+1} dx$

(c) $\int \frac{6x^3}{x^2+1} dx$

解：

(a) $\int(5-3x^{-1}+2x^{-2})\,dx = 5x - 3\ln|x| - \frac{2}{x} + C$

(b) $3\int \frac{1}{e^{-x}+1} dx = 3\int \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)} dx = 3\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = 3\ln|1+e^x| + C$

(c) 令 $u = x^2+1$，$du = 2x\,dx$，$\frac{du}{2} = x\,dx$ 代入

$$6\int \frac{x^2\,x}{x^2+1} dx = \frac{6}{2}\int \frac{u-1}{u} du = 3\int \left(1-\frac{1}{u}\right) du$$
$$= 3(u-\ln|u|) + C = 3[(x^2+1) - \ln(x^2+1)] + C$$

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

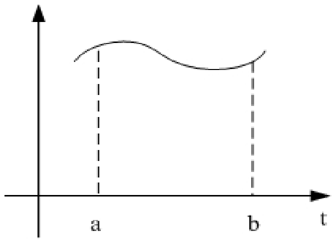
★ **面積與微積分基本定理：**

➢ 定積分（definite integral）：

主要目的為求面積。表示法為

面積 $= \int_a^b f(x)dx$，

條件，$f(x)$ 為定義在 $[a, b]$ 非負連續的函數。其中 a 是積分下限，b 是積分上限。稱為「$f(x)$ 由 a 到 b 的定積分」。



➢ 微積分基本定理(Fundamental Theorem of Calculus，簡稱 FTC)：

(1) 若 f 在閉區間 $[a, b]$ 為非負連續的函數，則

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

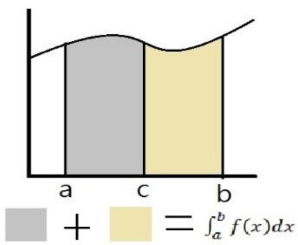
其中 F 為任意函數，對於所有在 $[a, b]$ 的 x 值恆滿足 $F'(x) = f(x)$。

(2) 定積分性質：

(a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，其中 k 為常數。

(b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ，$a < c < b$ ，如圖：



(d) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(e) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (積分上下限對調，積分值互為相反數。)

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

範例１０：

求 $\boldsymbol{x}$ 軸與函數圖形 $\boldsymbol{f(x)=x^2+1}$, $\boldsymbol{2\le x\le 3}$ 所圍成區域的面積。

解：

$$\int_2^3 (x^2+1)dx=\frac{1}{3}x^3+x\bigg|_2^3=\left(\frac{1}{3}3^3+3\right)-\left(\frac{1}{3}2^3+2\right)=12-\frac{14}{3}=\frac{22}{3}$$

範例１１：

$$\boldsymbol{\int_0^1 (4x+1)^2dx}$$

解：

(方法一)

$$\int_0^1 (4x+1)^2dx=\frac{1}{4}\int_0^1 (4x+1)^2\times 4\,dx=\frac{1}{4}\times\frac{(4x+1)^3}{3}\bigg|_0^1$$

$$=\frac{(4x+1)^3}{12}\bigg|_0^1=\left(\frac{5^3}{12}\right)-\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{124}{12}$$

(方法二)

令 $u=4x+1$，$\frac{du}{4}=dx$

當 $x=0$，$u=1\rightarrow$ 下限

當 $x=1$，$u=5\rightarrow$ 上限，代入

$$\int_0^1 (4x+1)^2dx=\frac{1}{4}\int_1^5 u^2du=\frac{u^3}{12}\bigg|_1^5=\left(\frac{5^3}{12}\right)-\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{124}{12}$$

班級：財金一甲　　　　學號：4A480057　　　　姓名：蔡宛蓁

範例１２：

$\int_0^5 |x-2|dx$

解：

$$\int_0^5 |x-2|dx = \int_2^5 (x-2)dx + \int_0^2 (2-x)dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^5 + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 2-\frac{5}{2}+2 = \frac{13}{2}$$

範例１３：

(a) $\int_{-2}^{2} x^2 dx$

(b) $\int_{-2}^{2} x^3 dx$

解：

(a) $\int_{-2}^{2} x^2 dx = 2\int_0^2 x^2 dx = 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}$

(b) $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$

範例１３討論：若 f 的圖形對稱於 y 軸或原點，則為**偶函數**：$f(-x)=f(x)$；若 f 的圖形對稱於原點，則為**奇函數**：$f(-x)=-f(x)$。

若為偶函數，則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

若為奇函數，則 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

以此判斷，$\int_{-2}^{2} x^2 dx$，$f(x)=x^2$ 為偶函數，因此使用偶函數的計算方法。

而 $\int_{-2}^{2} x^3 dx$，$f(x)=x^3$ 為奇函數，因此使用奇函數的計算方法。

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **兩圖形所圍成區域的面積：**

若函數 f 和 g 在區間 $[a,b]$ 為連續，且對於該區間的所有 x，$g(x) \le f(x)$，則圖形 f 、g 、 $x=a$ 和 $x=b$ 所圍成區域的面積為

$\mathbf{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$。

範例１４：

求兩圖形 $\mathbf{y = 3 - x^2}$ 和 $\boldsymbol{y = 2x}$ 所圍成區域的面積。

解：

(一)令$f(x) = 3 - x^2$，$g(x) = 2x$

解$g(x) = f(x)$，$3 - x^2 = 2x \rightarrow (x+3)(x-1) = 0$

$x = 1, -3$

(二)在$[-3,1]$中，取$x = 0$ 代入

$f(x) = 3 - 0^2 = 3$，$g(x) = 2 \times 0 = 0$

可得，$y_u = f(x)$，$y_{\mathrm{L}} = g(x)$

(三)$\mathrm{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [(3 - x^2) - (2x)]dx$

$$= (3x - \frac{x^3}{3} - x^2)\Big|_{-3}^{1} = \left(3 - \frac{1}{3} - 1\right) - (-9 - (-9) - 9) = \frac{32}{3}$$

面積為 $\frac{32}{3}$ 單位^2

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

★ **旋轉體的體積：**

➢ 圓碟法：

函數 f 在 $a \le x \le b$ 和 x 軸所圍區域，對x 軸旋轉所形成的立體體積為

體積 $= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ 。

範例１５：

求函數 $f(x) = -x^2 + 4$ 與 x 軸所圍成區域對 x 軸旋轉的立體體積。

解：

(一)旋轉軸 $\mathrm{y} = 0$

(二)$f(x) = -x^2 + 4 = 0$

$x = -2,2$

在 $[-2,2]$取$x = 0$ 代入

$f(x) = -0^2 + 4 = 4 > 0$

旋轉軸半徑為 $-x^2 + 4$

(三)體積 $= \pi \int_{-2}^{2} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} [-x^2 + 4]^2 dx$

$$= 2\pi \int_0^2 [-x^2 + 4]^2 dx = 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx$$

$$= 2\pi \times \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x\right)\Big|_0^2 = \frac{512}{15}\pi$$

體積為 $\frac{512}{15}\pi$ 立方單位

班級：財金一甲　　　學號：4A480057　　　姓名：蔡宛蓁

- 墊圈法：

令 f 和 g 在 $[a,b]$ 為非負且連續。若對區間的所有 x，恆有 $g(x) \leq f(x)$，則圖形 f 和 g $(a \leq x \leq b)$ 圍成的區域繞 x 軸旋轉所形成的立體體積為

$$\text{體積} = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 [g(x)]^2\} dx$$

此外，$f(x)$ 為外環半徑，$g(x)$ 為內環半徑。

範例１６：

求由圖形 $f(x) = 5 - x^2$ 和 $g(x) = 1$所圍成區域繞 x 軸旋轉所形成的立體體積。

解：

(一) $5 - x^2 - 1 = 4 - x^2$

當$-2 \leq x \leq 2$，$f(x)$ 為外環，$g(x)$ 為內環。

(二) $\text{體積} = \pi \int_{-2}^{2} [(5 - x^2)^2 - 1^2] dx = 2\pi \int_0^2 [(25 - 10x^2 + x^4) - 1] dx$

$$= 2\pi \times (\frac{x^5}{5} - \frac{10x^3}{3} + 24x)\Big|_0^2 = 2\pi \times \left(\frac{32}{5} - \frac{80}{3} + 48\right) = \frac{832}{15}\pi$$

體積為 $\frac{832}{15}\pi$ 立方單位