微積分作業

(1) 試證明 $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$

證明：設 f(x)=lnx

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-lnx}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

$$=\ln\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]$$ 令 $\frac{h}{x}=\frac{1}{m}$, h→0 時,m→∞

$$=\ln\left\{\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$=\ln\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{x}$$

(2) 試證明$\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$

證明： 令 y=e^{x}

同取 ln， 得 lny=lne^{x} ， lny=xlne=x

兩邊同時對 x 微分， 得 $\frac{y'}{y}=1$ ， y’= y ， y’= e^{x}

得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}e^{x}=e^{x}$。