微積分期末心得報告

在本學期裡，所學的單元從第五章到第八章裡，其中最讓我深感到興趣的單元是第八章；這一章裡面所用的運用跟算法，還有能夠拿來算出答案來的題目類型都讓我覺得很有趣。

壹・多變數函數

在第八章所學的是多變數函數，這個單元主要是在介紹多變數函數的定義，並將導數的觀念推廣到多於一個變數的函數。它能夠運用出多變數函數、偏導數(又稱偏微分)、兩變數得極值、Lagrange 乘數和雙重積分與平面上的面積。

這個章節裡面最令我感到興趣的就是偏導數，也就是偏微分。

偏導數的定義

多變數函數微分的概念更不容易完整明確的交代，對初學者而言，「函數在某一點可微分」 到底是何意義？如何判別可不可微分？這些疑問很難由抽象的定義得到啟示。因此比較實際的作法是先由偏微分的觀念入手，畢竟其與單變數函數的微分非常類似，較易被理解。但讀者必須切記：**前者的內涵遠較後者複雜，絕不能全部以「類比」視之！**

在以下的課程裡，為簡化數學概念的描述與方程式推演的複雜度，我們將以*m*=2（雙變數）、*n*=1（純量）函數 為主要說明對象（變數是3個以上的可以此類推），並使用一些較簡便的表示法：

$$f_x = \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y = \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial y}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

稱為f對 x 或 y 的偏微分。注意到上述任一偏微分公式取極限時， $h \to 0$只影響到其中一個變數，其它皆保持恆常不變！意即對一多變數函數作偏微分時，事實上還是把它當作單變數函數來微分（其它變數看成是固定的常數值），所有計算技巧並無不同！

假定 f 是一個具有兩個變數x與 y 的函數。如果令 y 固定在一常數，設為 $y = y_0$， 則$f(x, y)$可視為單一變數x的函數。它在$x = x_0$的導數稱為f在(x_0, y_0)對應於x的偏導數（Partialderivativeof f with respect to x at (x_0, y_0) 且表示成 $f_{x\,(x_0,y_0)}$。

因此:$f_{x\,(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_{0)} - f_{(x_0,y_0)}}{\Delta x}$

同樣的方式，f在(x_0, y_0)對應於y的偏導數表示成$f_y(x_0, y_0)$且得自

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_{0)} - f_{(x_0,y_0)}}{\Delta y}$$

倘若這些極限存在。

當$z = f(x, y)$就x跟y的一次偏導數的函數式就是$\frac{\partial z}{\partial x}$ ，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 它的意義如下

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$ 把 y 當成常數

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$把 x 當成常數

其相關例子如下:

尋求偏導數

找出$\frac{\partial z}{\partial x}$與$\frac{\partial z}{\partial y}$的方程式。$x^2 - 3xy + y^2$

解:

當$\frac{\partial z}{\partial x}$時，把 y 當成常數，就能解出$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$

當$\frac{\partial z}{\partial y}$時，把 x 當成常數，就能解出$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y$

對二元函數作偏微分時，若於$f(x, y)$中將y值固定，則f可視為單一變數x的函數，即將y看成常數，然後直接對x微分即可。同理，於$f(x, y)$中將x值固定， 則可將x視為常數，直接對y微分。因此，偏微分的計算與一元函數求導數的方法相同，只是分開對x或對y分別作微分就是了！

例 2.令$f(x, y) = x^2y + 3y^2$。求$f_x(1,2)$與$f_y(1,2)$。

解:

為求$f_x(x, y)$，把y視為一常數，然後對x微分，得$f_x(x, y) = 2xy$

因此f_x(1,2)=2*1*2=4

同樣的方式，把x視為一常數，然後對y微分，得$f_y(x,y) = x^2 + 6y$
因此f_y(1,2)=$1^2 + 6 * 2 = 13$

第八章裡除了偏導數之外，另一個令我感到有趣的單元是雙重積分與平面上的面積

多重積分是定積分的一類，它將定積分擴展到多元函數（多變量的函數），例如求$f(x,y)$或者 $f(x,y,z)$類型的多元函數的積分。

正如單參數的正函數的定積分代表函數圖像和 x 軸之間區域的面積一樣，正的雙變量函數的雙重積分代表函數所定義的曲面和包含函數定義域的平面之間所夾的區域的體積。（注意同樣的體積也可以通過三變量常函數 f(x, y, z) = 1 在上述曲面和平面之間的區域中的三重積分得到。若有更多變量，則多維函數的多重積分給出超體積。

在 8.2 節中，我學到一個微分方程有幾個變數時，可以一次對一個變數作微分，而把其他的變數當成常數。 因此當我學到利用相同的步驟來計算兩個或多個變數的積分函數時也不會感到訝異。 舉例來說，如果我得到偏導數
$f_x(x,y) = 2xy$時
則固定 *y* 為一個常數， 我可以對 *x* 做積分得到

$$\int f_x(x,y)dx = f(x,y) = x^2 + c(x)$$

這個步驟稱為對x的部分積分。積分常數 *C*(y) 被證實是 y 的函數， 因為對 x做積分時y是固定的。 同樣的，如果我得到偏導數
$f_y(x,y) = x^2$+2 時
則固定 *x* 為一個常數， 你可以對 *y* 做積分得到

$$\int f_y(x,y)dy = f(x,y) = x^2y + 2y + c(x)$$

在這個例子中，積分常數 *C*(x) 被證實是 x 的函數，因為對 y 做積分時 x是固定的。 因此在計算對定義兩個或多個的積分函數時，可以運用對一個變數的微積分基本定理來計算， 當固定其他變數為常數時，如下

$$\int_1^{2y} 2xydx = x^2y \Big|_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y$$

在這個式子中，為固定 *y* 值並且對 *x* 這個變數作積分，得到的結果為 *y* 的函數
因此當你做一個定義積分的函數只有一個變數時，可以忽略積分的常數項。

例 3. 找偏積分

$\int_1^x (2x^2y^2 + 2y)dy$ =?

解:

=$2x^2\frac{y^3}{3} + y^2 \Big|_1^x = \left(\frac{2x^5}{3} + x^2\right) - \left(\frac{2x^2}{3} + 1\right) = \frac{2x^5}{3} + \frac{x^2}{3} - 1$

對 y 做積分，將 x 視為常數去解。

積分中有積分稱為雙重積分。在變數的函數中，雙重積分有兩種表示法
這兩種表示法的差異是在於積分的表示法是由 *dxdy* 或 *dydx*。

例 4.計算雙重積分

$\int_1^2 \int_1^x (\,2x^2y^2 + 2y)\,dy\,dx$=?

解:

=$\int_1^2 (\frac{2x^5}{3} + \frac{x^2}{3} - 1) = (\frac{x^6}{9} + \frac{x^3}{9} - x) \Big|_1^2 = (\frac{64+8}{9} - 2) - (\frac{2}{9} - 1) = \frac{-11}{9}$

由例 3 得到解答$\frac{2x^5}{3} + \frac{x^2}{3} - 1$接下去算

對 x 做積分，y 視為常數來求解。

用偏積分找面積

雙重積分最簡單的應用是在平面中找面積 例:區塊 *R* 的限制在

$\mathrm{A} \le x \le b$和 $g_{1(x)} \le y \le g_2(x)$

$$\int_a^b \left[g_2(x) - g_{1(x)}\right] dx$$

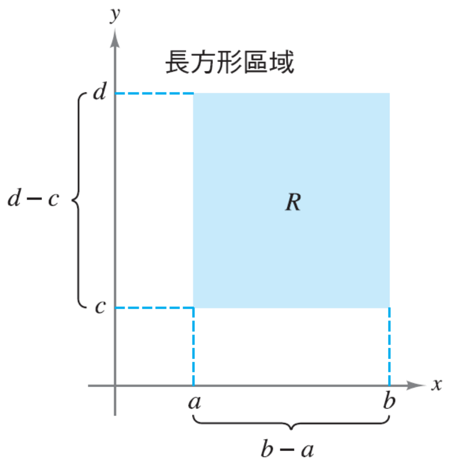
相同的面積可以用雙重積分來表示

$$\int_a^b \int_{g_{1(x)}}^{g_2(x)} dy\,dx$$

因為

$$\int_a^b \int_{g_{1(x)}}^{g_2(x)} dy\,dx = \int_a^b [y]_{g_{1(x)}}^{g_2(x)} = \int_a^b \left[g_2(x) - g_{1(x)}\right] dx$$

例 5. 求面積



解:
圖中的區域既是鉛直單純形又是水平單純形，所以
積分的順序可以任意，我們選擇 *dy dx* 而得到下式

$$\int_a^b \int_c^d dy\,dx = \int_a^b [y]_c^d\,dx = \int_a^b (\,d-c)\,dx = [(d-c)x]_a^b = (d-c)(b-a)$$

結論:

在這學期的課程中，我學到了好多好玩又有趣的單元，尤其是我所報告的這兩單元，都是將 x 或 y 作為分或積分，然後忽略 y 或 x，將呼略的變數視為常數，再來解答，最後再將數字帶進去算出答案來。

然而雙重積分，雖然前面將 x 或 y 視為常數去算，但後面還是會算到那個數，並將另一個視為常數來算。

總而言之，這個單元真是既好玩又有趣阿。有好多好玩的公式跟算法，可以用各種有趣的公是跟方法來算出各種好玩又有趣的答案來。這個單元真像寶藏一樣阿，越努力的去挖掘去研究去算，就能發現到許多樂趣；每當我算出一個有趣的題目，我就會有莫名的快感。簡單來講，這個單元真是個寶阿，實在是太有趣了。