

## 微積分期末報告

利用分部積分法與積分查表法求:

4a480083 劉家邦

財金一甲

$$\int x^2 e^x dx$$

1. 分部積分法:(這題須做兩次分部積分)

$$\text{公式: } \int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{<sol.> 另 } dv = e^x dx \quad v = e^x$$

$$u = x^2 \quad du = 2x dx$$

$$\text{原積分會變為} \Rightarrow x^2 e^x - \int 2x e^x dx \text{ (1)}$$

在這裡必須將  $\int 2x e^x dx$  這項拉出來在做一次

注意:方法必須繼續使用分部積分 如果使用其他方法就無法將它化簡

$$\text{另 } dv = e^x dx \quad v = e^x$$

$$u = 2x \quad du = 2 dx$$

$$\int 2x e^x dx \text{ 會變為} \Rightarrow 2x e^x - \int 2 e^x dx$$

將後面這個複雜的積分拆開後,要記得將此積分帶回(1)

$$\text{可得結果為 } x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$\text{化簡後得} \Rightarrow e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

2. 積分查表法:(這裡需要用到兩個公式)

$$\text{公式: } 1. \int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$$

$$2. \int u e^u du = (u-1) e^u + C$$

$$\text{原積分利用第一個公式可寫成 } x^2 e^x - 2 \int e^x dx$$

$$\text{再利用第二個公式可將 } x^2 e^x - 2 \int e^x dx \text{ 改寫成 } x^2 e^x - 2(x-1)e^x + c$$

最後經過整理就可以得到  $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

請問  $\int \frac{2x+1}{x^2-x-6} dx$  除了查表外,可以直接算嗎?

<sol.>

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx + \int \frac{2}{x^2-x-6} dx$$

這題必須分兩部分來算

$$(1) \int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$\text{另 } u = x^2 - x - 6 \quad du = (2x-1) dx$$

$$(2) \int \frac{2}{x^2-x-6} dx = 2 \int \frac{1}{x^2-x-6} dx = -\frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$$

$$\text{公式: } \int \frac{1}{u^2-a^2} du = - \int \frac{1}{a^2-u^2} du = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

需先將  $x^2-x-6$  變成  $(x-1)^2 - \frac{25}{4}$

這時候公式裡的  $u = x - \frac{1}{2}$       $a = \frac{5}{2}$

$$\text{所以 } \int \frac{2x+1}{x^2-x-6} dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x-6} dx + \int \frac{2}{x^2-x-6} dx$$

$$= \int \frac{1}{u} du - \frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$$

$$= \ln |u| + C - \frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$$

$$= \ln |x^2 - x - 6| - \frac{2}{5} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C$$