10402 信號與系統 期中 Homework

1. 一個系統之輸出/輸入關係爲 $y(t)=ax(t)+b$，其中 a 和 b 爲常數，說明此系統爲非線性系統。(see Homework #1)

2. 計算下列積分

(i) $\int_{-\infty}^{t}(\cos t)u(t)dt$

(ii) $\int_{-\infty}^{t}(\cos t)d(t)dt$ [考慮 $t=0,\ t<0,\ t>0$ 三種情況]

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t)u(t-2)d(t)dt$

(iv) $\int_{0}^{2p}t(\cos\frac{t}{4})d(t-p)dt$

解析：(i) 當 $t\le 0$ 時

$\int_{-\infty}^{t}(\cos t)u(t)dt=0$ [因爲在積分範圍 $(-\infty,t)$ 內 $(\cos t)u(t)=0$]

當 $t>0$ 時

$\int_{-\infty}^{t}(\cos t)u(t)dt=\int_{0}^{t}\cos t\,dt=\sin t$

(ii) 當 $t\ge 0$ 時，$\int_{-\infty}^{t}(\cos t)d(t)dt=\cos 0=1$

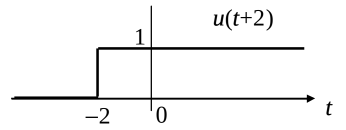
當 $t<0$ 時，$\int_{-\infty}^{t}(\cos t)d(t)dt=0$ [因爲 $d(t)$ 不在積分範圍 $(-\infty,t)$ 內]

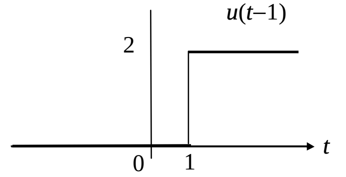
(iii) $\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t)u(t-2)d(t)dt=0$ [因爲任意 t 值之 $u(t-2)d(t)=0$]

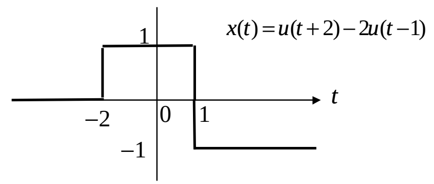
(iv) $\int_{0}^{2p}t(\cos\frac{t}{4})d(t-p)dt=t(\cos\frac{t}{4})\Big|_{t=p}=\frac{\sqrt{2}p}{2}$

3. 將信號 $x(t)=u(t+2)-2u(t-1)$ 繪圖。

解析：將信號 $u(t+2)$ 與 $2u(t-1)$ 分別繪圖，再依相對應位置之波形相減(如下圖所示)。



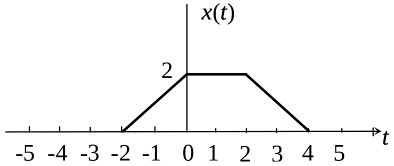




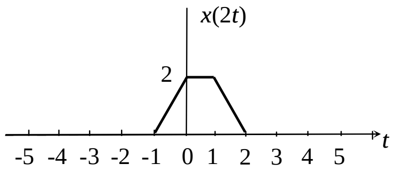
4. 信號 $x(t)$ 如下圖所示，請分別畫出下列信號

(i) $x(2t)$ (ii) $x(t/2)$ (iii) $x(-t)$ (iv) $x(t-2)$

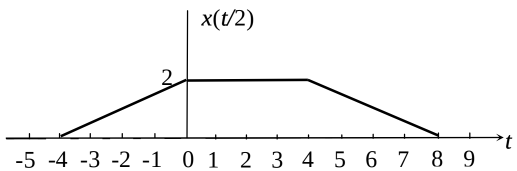
(v) $x(-t-2)$ (vi) $x(-t+2)$ (vii) $\frac{1}{2}x(t)$



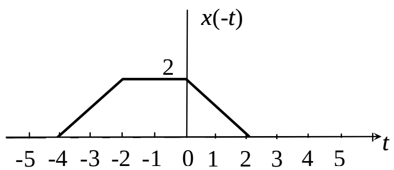
解析：(i) 時間軸等比例壓縮



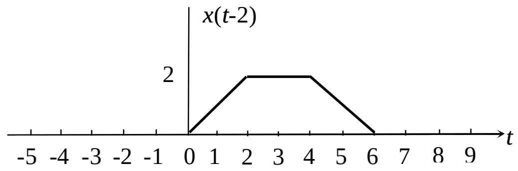
(ii) 時間軸等比例擴展



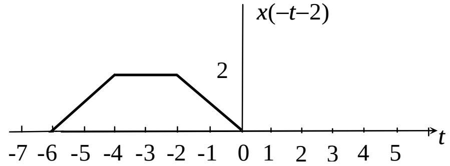
(iii) 時間翻轉運算



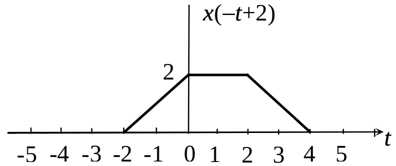
(iv) 時間平移運算



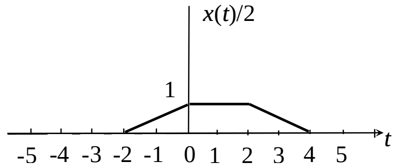
(v) 時間翻轉與平移混合運算



(vi) 時間翻轉與平移混合運算



(vii) 振幅縮小(減半)



5.　決定以下信號爲能量訊號、功率信號或兩者皆非。

(i) $x(t)=\begin{cases} e^{at}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$，(考量 $a>0$ 與 $a<0$ 兩種情況)

(ii) $x(t)=A\cos(w_0 t+q)$

(iii) $x(t)=\begin{cases} t^2, & t>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

解析：(i) 當 $a>0$ 時；利用(1.13)式計算 $x(t)$的總能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt \;=\int_0^{\infty}|e^{at}|^2\,dt$$
$$=\int_0^{\infty}e^{2at}dt=\left.\frac{e^{2at}}{2a}\right|_0^{\infty}$$
$$=(\infty-(\frac{1}{2a}))=\infty$$

利用(1.14)式計算 $x(t)$的平均功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|e^{at}|^2\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T/2}e^{2at}dt=\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}(\left.\frac{e^{2at}}{2a}\right|_0^{T/2})]$$
$$=\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}(\frac{e^{aT}}{2a}-\frac{1}{2a})]=\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{2aT}(e^{aT}-1)]$$
$$=\infty$$

故當 $a>0$ 時，$x(t)$不是能量信號也不是功率信號。

當 $a<0$ 時；利用(1.13)式計算 $x(t)$的總能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt \;=\int_0^{\infty}|e^{at}|^2\,dt$$
$$=\int_0^{\infty}e^{2at}dt=\left.\frac{e^{2at}}{2a}\right|_0^{\infty}$$
$$=(0-\frac{1}{2a})=-\frac{1}{2a}<\infty$$

所以當 $a<0$ 時，因爲 $x(t)$的總能量有限，亦即 $0<E<\infty$，故此信號爲能量信號。

(ii) 因爲 $x(t)$ 是週期信號，利用(1.17)式計算 $x(t)$的平均功率

$$P=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}A^2\cos^2(w_0t+q)dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}A^2\,\frac{1+\cos(2w_0t+2q)}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2T_0}\int_0^{T_0}A^2\,dt+\frac{A^2}{2T_0}\int_0^{T_0}\cos(2w_0t+2q)dt=\frac{A^2}{2}<\infty$$

上式中之弦波信號積分一個週期爲 0。因爲 $x(t)$的平均功率值有限($P=A^2/2$)，亦即 $0<P<\infty$，此信號爲功率信號。一般而言，週期信號是屬於功率信號。

(iii) 利用(1.13)式計算 $x(t)$的總能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt \;=\int_0^{\infty}|t^2|^2\,dt$$
$$=\int_0^{\infty}t^4dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{\infty}$$
$$=(\infty-0)=\infty$$

利用(1.14)式計算 $x(t)$的平均功率

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|t^2|^2\,dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T/2}t^4dt=\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^{T/2})]$$
$$=\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}(\frac{T^4}{64}-0)]=\infty$$

$x(t)$不是能量信號也不是功率信號。

6. 請寫出圖-P1 所示信號之數學表示式。(See Homework #1)

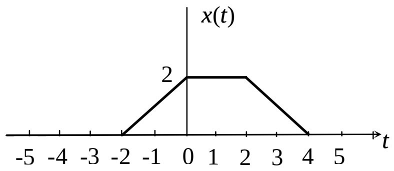


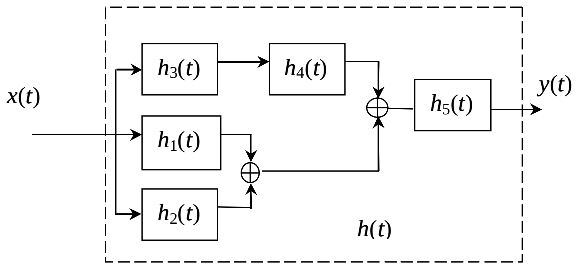
圖-P1

7. 假定 5 個連續時間 LTI 次系統的脈衝響應分別是 $h_1(t)$、$h_2(t)$、$h_3(t)$、$h_4(t)$ 與 $h_5(t)$，以此 5 個次系統合成一個新系統，此系統的脈衝響應為

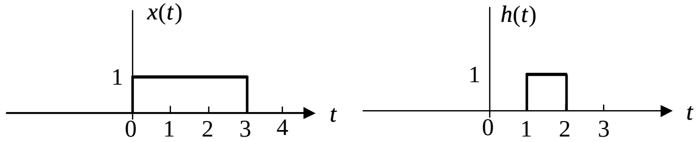
$$h(t) = \{[h_1(t) + h_2(t)] + h_3(t) * h_4(t)\} * h_5(t)$$

請繪出此新系統的架構圖。

解析: 新系統的架構如下圖所示。



8. 一連續時間 LTI 系統其輸入信號 $x(t)$ 與脈衝響應 $h(t)$ 分別描述如圖-P2(a)與圖-P2(b)，計算輸出信號 $y(t)$。(See Homework #1)



(a) $x(t)$ (a) $h(t)$

圖-P2 連續時間 LTI 系統輸入信號 $x(t)$ 與脈衝響應 $h(t)$

9. 假定一連續時間 LTI 系統的脈衝響應 $h(t)$ 與輸入信號 $x(t)$ 分別為：

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 3 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求其輸出信號 $y(t)$。

10. 一連續時間 LTI 系統其輸入信號為 $x(t)$ 時，輸出信號為 $y(t)$，證明輸入信號為 $x'(t)$ 時此系統之輸出信號為 $y'(t)$。[$x'(t)$ 表示 $x(t)$ 的微分] (See Homework #1) (See Homework #1)

11. 請繪出下列信號的單邊頻譜。

(i) $x_1(t) = \cos(500pt) + \cos(1500pt + p/4) - 4\cos(4000pt)$

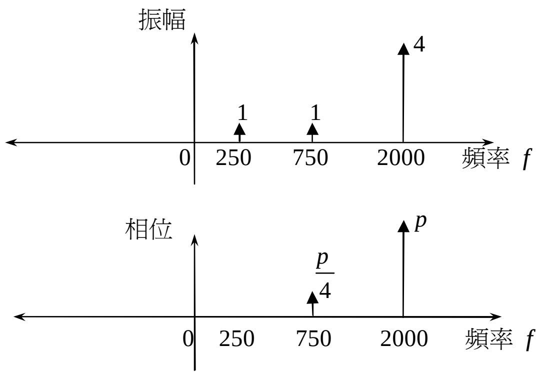
(ii) $x_2(t) = 2\cos(1500pt - p/6) - \sin(3000pt + p/6) + 2\sin(8000pt)$

(iii) $x_3(t) = 2\cos(3000pt - p/5) - 5\sin(7000pt) + 2\cos(5000pt + p/6) - 2\sin(5000pt + p/6)$

解析：(i) 應用範例所使用的技巧可將信號 $x_1(t)$ 表示式改寫成

$$x_1(t) = \cos(500p\,t) + \cos(1500p\,t + \frac{p}{4}) - 4\cos(4000p\,t)$$
$$= \cos(500p\,t) + \cos(1500p\,t + \frac{p}{4}) + 4\cos(4000p\,t + p)$$

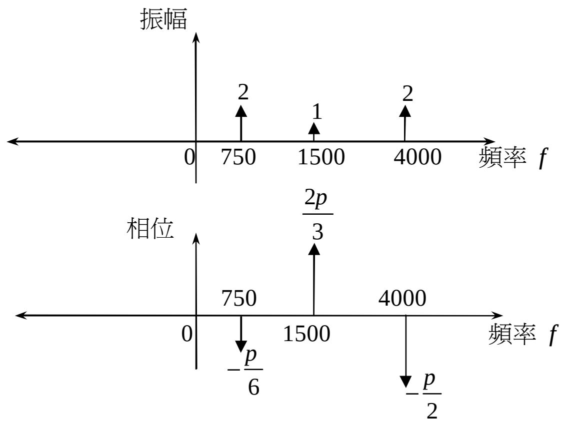
由改寫後的信號表示式可知 $x_1(t)$ 是由 3 個餘弦信號組合而成，其振幅大小分別爲 1、1 與 4；而其頻率分別爲 250、750 與 2000 Hz；以及其相位分別爲 0、$p/4$ 與 p，信號 $x_1(t)$ 的單邊頻譜如下圖所示。



(ii) 同樣地將信號 $x_2(t)$ 改寫成

$$x_2(t) = 2\cos(1500pt - p/6) - \sin(3000pt + p/6) + 2\sin(8000pt)$$
$$= 2\cos(1500pt - p/6) + \cos(3000pt + 2p/3) + 2\cos(8000pt - p/2)$$

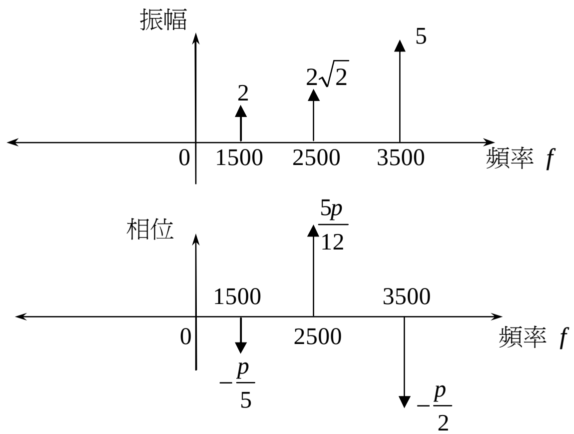
由改寫後的信號表示式可知 $x_2(t)$ 是由 3 個餘弦信號組合而成，其振幅大小分別爲 2、1 與 2；而其頻率分別爲 750、1500 與 4000 Hz；以及其相位分別爲 $-p/6$、$2p/3$ 與 $-p/2$，信號 $x_2(t)$ 的單邊頻譜如下圖所示。



(iii) 同樣地將信號 $x_3(t)$ 改寫成

$$x_3(t) = 2\cos(3000pt - p/5) - 5\sin(7000pt) + 2\cos(5000pt + p/6) - 2\sin(5000pt + p/6)$$
$$= 2\cos(3000pt - p/5) + 5\cos(7000pt - p/2) + 2\sqrt{2}\cos(5000pt + p/6 + p/4)$$
$$= 2\cos(3000pt - p/5) + 2\sqrt{2}\cos(5000pt + 5p/12) + 5\cos(7000pt - p/2)$$

由改寫後的信號表示式可知 $x_3(t)$ 是由 3 個餘弦信號組合而成，其振幅大小分別爲 2、$2\sqrt{2}$ 與 5；而其頻率分別爲 1500、2500 與 3500 Hz；以及其相位分別爲 $-p/5$、$5p/12$ 與 $-p/2$，信號 $x_3(t)$ 的單邊頻譜如下圖所示。



12. 請繪出下列信號的頻譜。

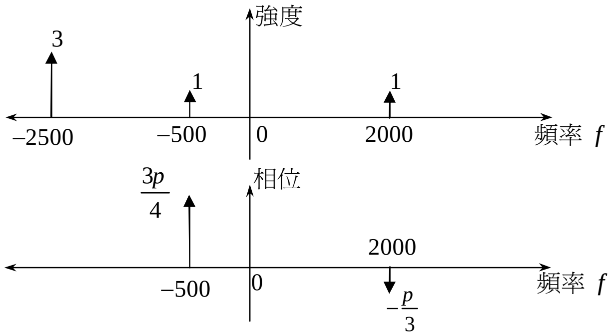
(i) $x_c(t) = -e^{-j(1000pt+p/4)} - j2e^{j(4000pt+p/6)} + 3e^{-j5000pt}$

(ii) $x_c(t) = -e^{-j(1000pt+p/4)} - 2e^{-j4000pt} + 3e^{-j6000pt} - j4e^{-j6000pt}$

解析：(i) 應用範例所使用的技巧可將信號 $x_c(t)$ 改寫成

$$
\begin{aligned}
x_c(t) &= -e^{-j(1000pt+\frac{p}{4})} - j2e^{j(4000pt+\frac{p}{6})} + 3e^{-j5000pt} \\
&= e^{jp}e^{-j(1000pt+\frac{p}{4})} + e^{-j\frac{p}{2}}e^{j(4000pt+\frac{p}{6})} + 3e^{-j5000pt} \\
&= e^{j(-1000pt+\frac{3p}{4})} + e^{j(4000pt-\frac{p}{3})} + 3e^{-j5000pt}
\end{aligned}
$$

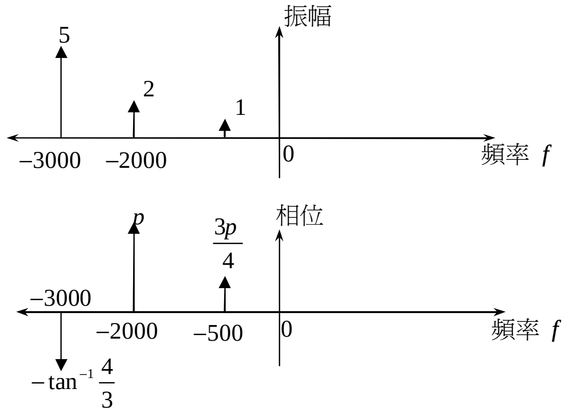
由上式可知信號 $x_c(t)$ 由三個複指數信號組合而成，強度大小分別為 1、1 與 3；頻率分別為 -500、2000 與 -2500 Hz；以及相位分別為 $3p/4$、$-p/3$ 與 0，信號 $x_c(t)$ 的頻譜如下圖所示。



(ii) 同樣地將信號 $x_c(t)$ 改寫成

$$
\begin{aligned}
x_c(t) &= -e^{-j(1000pt+p/4)} - 2e^{-j4000pt} + 3e^{-j6000pt} - j4e^{-j6000pt} \\
&= e^{jp}e^{-j(1000pt+p/4)} + 2e^{jp}e^{-j4000pt} + e^{-j6000pt}(3-j4) \\
&= e^{j(-1000pt+3p/4)} + 2e^{j(-4000pt+p)} + e^{-j6000pt}(5e^{-j\tan^{-1}(4/3)}) \\
&= e^{j(-1000pt+3p/4)} + 2e^{j(-4000pt+p)} + 5e^{j(-6000pt-\tan^{-1}(4/3))}
\end{aligned}
$$

由上式可知信號 $x_c(t)$ 由三個複指數信號組合而成，強度大小分別為 1、2 與 5；頻率分別為 -500、-2000 與 -3000 Hz；以及相位分別為 $3p/4$、p 與 $-\tan^{-1}3/4$，信號 $x_c(t)$ 的頻譜如下圖所示。



13. 請將信號表示成傅利葉級數展開式 。

$$x_c(t) = 3e^{j(2000\pi t+\pi/6)} + 4e^{j(4000\pi t+\pi/3)} + e^{-j(6000\pi t+\pi/6)}$$

Sol：

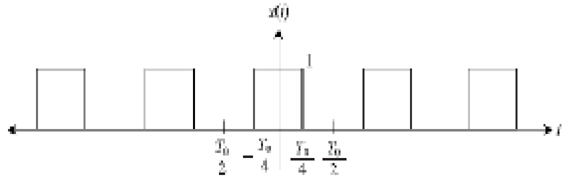
信號由 3 項複指數組合而成，其頻率分別爲 1000、2000 與 3000Hz，先找出 3 項頻率的最大公因數爲 1000，因此信號是一週期信號且其基本頻率 1000 Hz，仔細觀察可發現其表示式已是複指數傅利葉級數之型式，因此只要改寫成爲

$$\begin{aligned} x_c(t) &= 3e^{j(2000\pi t+\pi/6)} + 4e^{j(4000\pi t+\pi/3)} + e^{-j(6000\pi t+\pi/6)} \\ &= 3e^{j\pi/6}e^{j2000\pi t} + 4e^{j\pi/3}e^{j4000\pi t} + e^{-j\pi/6}e^{-j6000\pi t} \\ &= 3e^{j\pi/6}e^{j2\pi f_0 t} + 4e^{j\pi/3}e^{j4\pi f_0 t} + e^{-j\pi/6}e^{-j6\pi f_0 t}, \qquad f_0 = 1000 \end{aligned}$$

將上式與(4.5)式之複指數傅利葉級數表示式比較，可直接得到複指數傅利葉級數之係數：

$c_{-3} = e^{-j\pi/6}$;　$c_1 = 3e^{j\pi/6}$;　$c_2 = 4e^{j\pi/3}$,　其他所有 $c_{n=0}$

14. 請計算下圖之方波週期信號之平均功率。



15. 計算以下信號的複指數傅利葉級數表示式、平均功率、頻譜。

$x(t) = 2\cos(1500\pi t - \pi/6) - \sin^2(2000\pi t + \pi/6)$

sol：(i) 改寫信號

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2\cos(1500\pi t - \pi/6) - \sin^2(2000\pi t + \pi/6) \\
&= 2\cos(1500\pi t - \pi/6) - \left[\frac{1-\cos 2(2000\pi t + \pi/6)}{2}\right] \\
&= 2\cos(1500\pi t - \pi/6) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4000\pi t + \pi/3) \\
&= e^{j(1500\pi t - \pi/6)} + e^{-j(1500\pi t - \pi/6)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j(4000\pi t + \pi/3)} + \frac{1}{4}e^{-j(4000\pi t + \pi/3)} \\
&= e^{j(1500\pi t)}e^{-j\pi/6} + e^{-j(1500\pi t)}e^{j\pi/6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j(4000\pi t)}e^{j\pi/3} + \frac{1}{4}e^{-j(4000\pi t)}e^{-j\pi/3}
\end{aligned}
$$

由以上表示式可看出 $x(t)$ 是由直流以及頻率分別爲 750 和 2000 之單頻弦波信號所組成，因此 $x(t)$ 的基本頻率 $f_0 = \mathrm{GCD}(0,750,2000) = 250$，令 $f_0 = 250$，$x(t)$ 可改寫成複指數傅利葉級數表示式：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j2\pi(3f_0)t} + e^{j\frac{\pi}{6}}e^{j2\pi(-3f_0)t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi(8f_0)t} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi(-8f_0)t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}
\end{aligned}
$$

比對以上等式兩邊之係數，可得

$$c_0 = -\frac{1}{2};\ \ c_3 = e^{-j\frac{\pi}{6}};\ \ c_{-3} = e^{j\frac{\pi}{6}};\ \ c_8 = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{3}};\ \ c_{-8} = \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{3}};$$

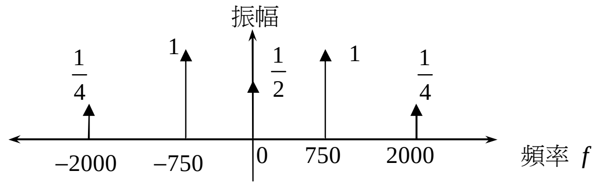
其他所有 $c_n = 0$ 。

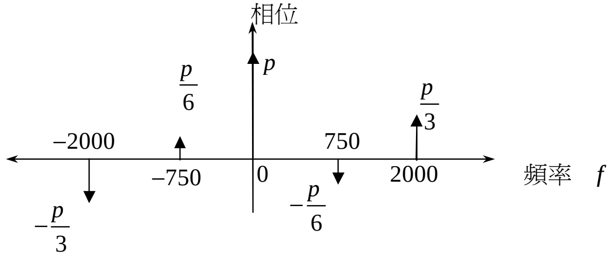
(ii) 使用(4.23)式右邊之累加式計算信號平均功率如下：

$P = \frac{1}{2}\times 2^2 + (-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2 = \frac{19}{8}$ w (由上述信號表示式之第 3 式計算)

$P = 1^2 + 1^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2 = \frac{19}{8}$ w(由上述信號表示式之第 5 式計算)

以直覺方式)繪出頻譜，如下圖所示。





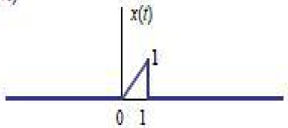
EX 2.14 已知脈衝響應，$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}u(t)$

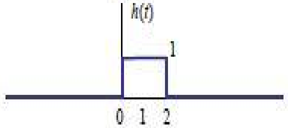
找出步階響應 s(t) = ?

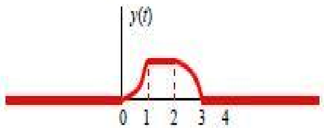
$\because\ s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau$

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-\infty}^{t}\left[\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}u(\tau)\right]d\tau \\
&= \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau = \left[-e^{-\frac{\tau}{RC}}\right]_0^t = -e^{-\frac{t}{RC}} + 1 \\
&= 1 - e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$

6. Given $x(t)$ and $h(t)$ as follows, find $y(t) = x(t)*h(t)$
(20%)







6. $x(t)$及$h(t)$如圖所示,計算$y(t) = x(t)*h(t)$。
(註：計算列於此)

$t < 0 : y(t) = 0$

$0 < t < 1 : y(t) = \frac{1}{2}t^2$

$1 < t < 2 : y(t) = \frac{1}{2}$

$2 < t < 3 : y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-2)^2 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - \frac{3}{2}$

$t > 3 : y(t) = 0$

7. $x[n]$及$h[n]$如圖所示,計算$y[n] = x[n]*h[n]$。
(註：計算列於此)