# 10402 信號與系統 期末 Homework

1. 給定信號 $x(t)=\dfrac{2a}{a^2+(2pt)^2}$，計算此信號的 90%能量頻寬

信號號 $x(t)=\dfrac{2a}{a^2+(2pt)^2}$ 的傅利葉轉換爲：(參考表 4-1)

$$X(f)=e^{-a|f|} \quad a>0$$

利用 Parseval 定理計算信號的總能量：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-a|f|}|^2\,df=\int_{-\infty}^{0}e^{2af}df+\int_{0}^{\infty}e^{-2af}df=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{a}$$

依(5.38)式之定義，可得

$$\begin{aligned}\int_{-f_{90}}^{f_{90}}|e^{-a|f|}|^2\,df&=\int_{-f_{90}}^{0}e^{2af}df+\int_{0}^{f_{90}}e^{-2af}df\\&=\frac{1}{2a}(1-e^{-2af_{90}})-\frac{1}{2a}(e^{-2af_{90}}-1)\\&=\frac{1}{a}(1-e^{-2af_{90}})=\frac{0.9}{a}\end{aligned}$$

最後可解出 $x(t)$ 的 90%能量頻寬：

$$f_{90}=-\frac{1}{2a}\ln(0.1)\approx\frac{1.15}{a}$$

2. 給定信號 $x(t)=\dfrac{1}{t^2+a^2}$，計算此信號的 95%能量頻寬。

**解析：**

將信號 $x(t)$ 改寫成

$$x(t)=\frac{4p\,a}{\frac{4p\,a}{(2p)^2}\left[(2p\,a)^2+(2p\,t)^2\right]}=\frac{p}{a}\frac{4p\,a}{\left[(2p\,a)^2+(2p\,t)^2\right]}$$

信號 $x(t)=\dfrac{1}{t^2+a^2}$ 的傅利葉轉換爲：(參考表 4-1)

$$X(f)=\frac{p}{a}e^{-2p\,a|f|}\ ,\ a>0$$

利用 Parseval 定理計算信號的總能量：

$$\frac{p^2}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-2p\,a|f|}|^2\,df=\frac{p^2}{a^2}\int_{-\infty}^{0}e^{4p\,af}df+\frac{p^2}{a^2}\int_{0}^{\infty}e^{-4p\,af}df=\frac{p}{4a^3}+\frac{p}{4a^3}=\frac{p}{2a^3}$$

依(5.38)式之定義，可得

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{a^2}\int_{-f_{95}}^{f_{95}}|e^{-2p\,a|f|}|^2\,df&=\frac{p^2}{a^2}\int_{-f_{95}}^{0}e^{4p\,af}df+\frac{p^2}{a^2}\int_{0}^{f_{95}}e^{-4p\,af}df\\&=\frac{p}{4a^3}(1-e^{-4p\,af_{95}})-\frac{p}{4a^3}(e^{-4p\,af_{95}}-1)\\&=\frac{p}{2a^3}(1-e^{-4p\,af_{95}})=\frac{0.95p}{2a^3}\end{aligned}$$

最後可解出 $x(t)$ 的 95%能量頻寬：

$$f_{95}=-\frac{1}{4ap}\ln 0.05\approx\frac{3}{4ap}$$

3. 計算下列時移方形脈波信號之傅利葉轉變

(a) $x(t) = rect(\dfrac{t+b/2}{b})$ ( see textbook, P4-9, page 189)

(b) $x(t) = 2 * rect(\dfrac{t-b}{b})$

(c) $x(t) = rect(\dfrac{t-a}{2a})$

(d) $x(t) = \dfrac{\sin(2pWt)}{pt} = 2W \sin c(2Wt)$

4. 一連續時間類比信號 $x(t) = 2 + \cos(200p) + 2\cos(600pt)$ ，請回答以下問題。

(a) 請劃出信號 $x(t)$ 之頻譜。
(b) 信號 $x(t)$ 之頻寬為何?
(c) 若理想取樣此信號，其奈式頻率(Nyquist rate)為何?
(d) 若以取樣週期 $T_s = 0.002$ 秒理想取樣此信號，取樣序列之表示式為何?
(e) 請劃出(d)部份之取樣後信號的頻譜

解析: (a) 信號 $x(t)$ 由直流以及兩個弦波所組成，其中兩個弦波振幅分別為 1 與 2 ；相角皆為零。利用第 4 章之方法可繪出 $x(t)$ 之雙邊頻譜，如圖 P6-9(A)所示(相角皆為零，因此未繪出相位頻譜)。

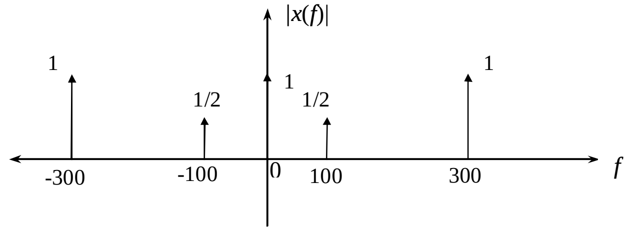



圖 P6-9(A) $x(t)$ 之振幅頻譜

(b) 由 $x(t)$ 之頻譜可知頻寬為 300 Hz。

(c) 理想取樣此信號，其奈式頻率(Nyquist rate) $f_s$ 等於信號頻寬的兩倍，即 $f_s = 2f_m = 600\,\text{Hz}$

(d) 若以取樣週期 $T_s = 0.002$ 秒理想取樣此信號，取樣序列之表示式為

$$x[n] = x(nT_s) = 2 + \cos(0.4pn) + 2\cos(1.2pn), \quad n\text{為整數}$$

(e) 由(6.8)式可知取樣後信號的頻譜 $X_s(f)$ 在頻域上是一個週期性的頻譜

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \qquad \text{(P6.9A)}$$

其中 $T_s = 0.002,\ f_s = \dfrac{1}{T_s} = 500\,\text{Hz}$。依據圖 P6-9(A)以及(P6.9A)式可繪出取樣後信號的頻譜，如圖 P6-9(B)所示。

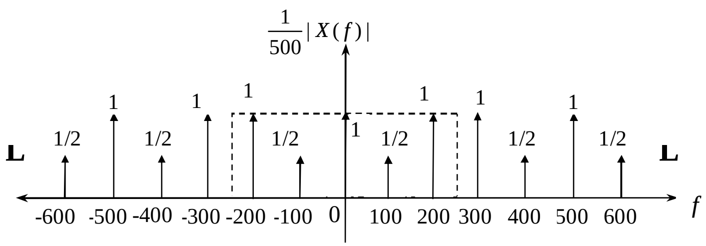



圖 P6-9(B) 取樣後信號的頻譜 $X_s(f)$

本題信號 $x(t)$ 之頻寬為 300 Hz，依據取樣定理，取樣速率必須大於等於 600 Hz，才可利用理想低通濾波器由其取樣後之離散時間信號 $x_s(t)$ 重建回 $x(t)$。本題由於取樣速率小於 600 Hz 造成取樣後之離散時間信號的頻譜有重疊現象(*aliasing*)，故無法重建原信號。圖 P6-9(B)顯示理想低通濾波器(虛線內)濾得之頻譜與圖 P6-9(A)之頻譜不同。

5. 一連續時間 LTI 系統其輸入信號 x(t)與脈衝響應 h(t)分別為(15%)
$x(t)=e^{-at}u(t); h(t)=e^{at}u(-t)$，其中 a>0，以頻域分析方式計算輸出信號 y(t) (see textbook P5-1, page 222)

6. 給定三個序列如圖 P7-9 所示，請以單位步階序列描述這三個序列。

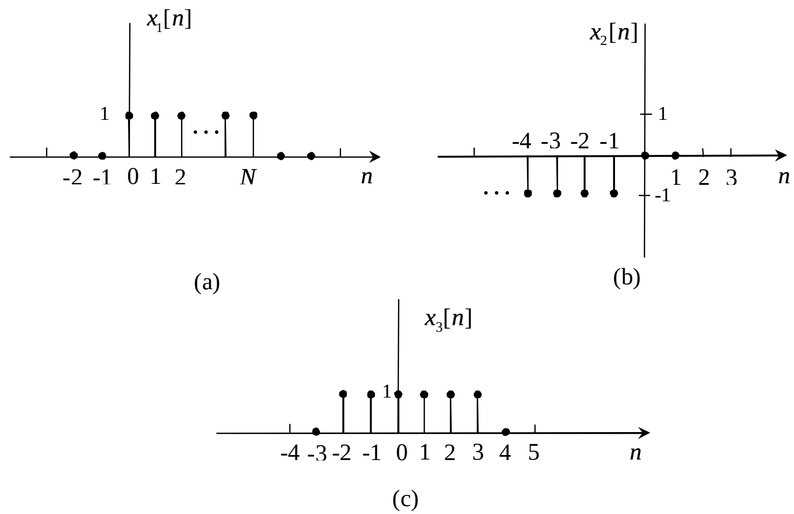



圖 P7-9

**解析**：(a) $x_1[n]=u[n]-u[n-(N+1)]$

(b) $x_2[n]=-u[-n-1]$

(c) $x_3[n]=u[n+2]-[n-4]$

7. 假定一離散時間 LTI 系統的脈衝響應 $h[n]$ 與輸入 $x[n]$ 分別爲：

$$h[n]=u[n]-u[n-4]$$

$$x[n]=u[n]-u[n-2]$$

求其輸出信號 $y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$

**解析：** 用以下 5 個步驟進行旋積和之計算可求得此離散時間 LTI 系統的輸出信號。

步驟 1. 將 $x[n]$ 的參數 $n$ 置換成參數 $k$ 得到 $x[k]$，並將序列 $x[k]$ 對應 $k$ 繪圖，如圖 Q8-2(a)所示。

步驟 2. 將 $h[n]$ 的參數 $n$ 置換成參數 $k$ 得到 $h[k]$，並將序列 $h[k]$ 對應 $k$ 繪圖，如圖 Q8-2(b)所示。

步驟 3. 將 $h[k]$ 翻轉得 $h[-k]$，圖 Q8-2(c)顯示 $h[-k]$。

步驟 4. 將 $h[-k]$ 平移 $n$ 得 $h[-(n-k)]=h[n-k]$，並繪圖，如圖 Q8-2(d)所示。

步驟 5. 將 $x[k]$ 與 $h[n-k]$ 兩圖上下並排，且座標軸對齊，將 $x[k]$ 圖固定不動，移動 $h[n-k]$ 圖，即移動時間參數 $n$ (從 $-\infty$ 移往 $\infty$)，針對每一 $n$ 值，依序變化參數 $k$ 值所對應之 $x[k]$ 與 $h[n-k]$ 之乘積做累加運算。其分段處理如圖 Q8-3 所示，參數 $n$ 分段細節詳述如下：

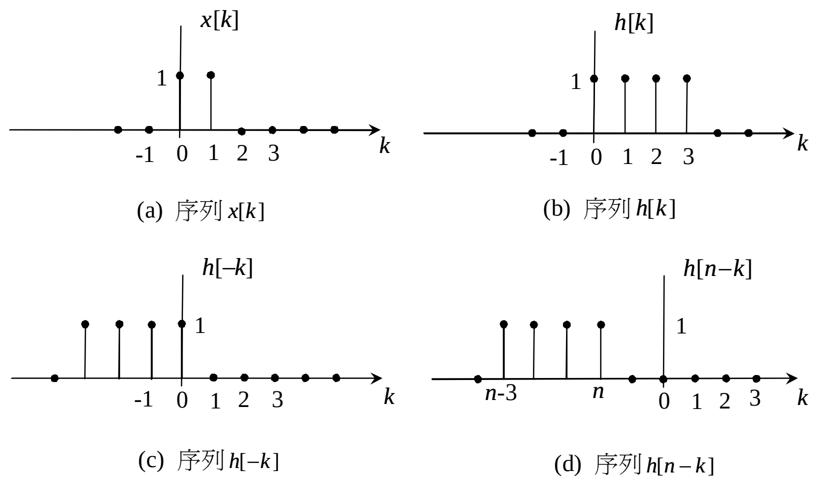
(i) 當 $n<0$ 時，圖 Q8-3(a)顯示在 $-\infty\le k\le\infty$ 範圍內，$x[k]$ 與 $h[n-k]$ 的乘積皆爲 0，所以其累加結果爲 0，即 $y[n]=0,\ n<0$。

(ii) 當 $0\le n\le 4$ 時，觀察圖 Q8-3(b)，針對每一 $n$ 值，依參數 $k$ 值所對應之 $x[k]$ 與 $h[n-k]$ 之乘積做累加運算，例如 $n=2$ 的情況，只有 $k=0,1,2$ 時之 $x[k]$ 與 $h[n-k]$ 之乘積不爲 0 且皆爲 1，累加這 3 個不爲 0 之乘積可得 $y[2]=3$，依此方式可以分別計算得到

$$y[0]=1\times1=1$$
$$y[1]=1\times1+1\times1=2$$
$$y[2]=1\times1+1\times1=2$$
$$y[3]=1\times1+1\times1=2$$
$$y[4]=1\times1=1$$

(iii) 當 $n>4$ 時，圖 Q8-3(c)顯示在 $-\infty\le k\le\infty$ 範圍內，$x[k]$ 與 $h[n-k]$ 的乘積皆爲 0，所以其累加結果爲 0，即 $y[n]=0,\ n>4$。

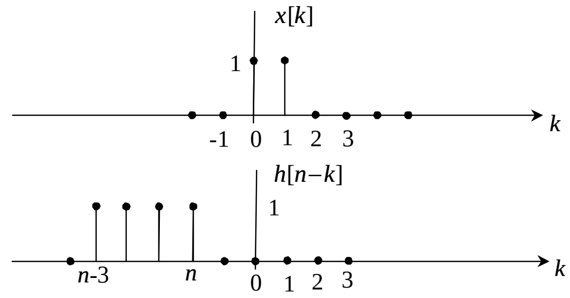
整合上述結果，輸出信號可表示爲 $y[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,2,2,1\}$，如圖 Q8-4 所示。



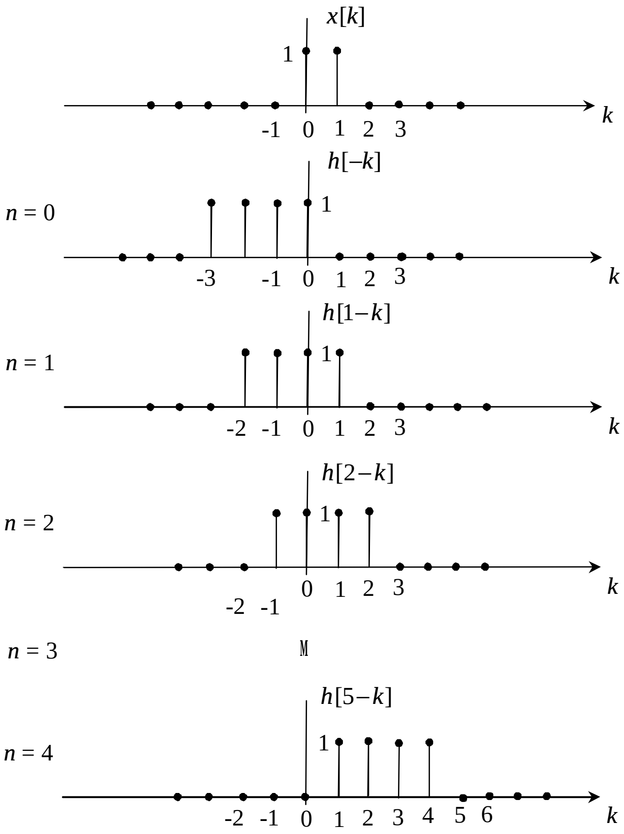

(a) 序列 $x[k]$ (b) 序列 $h[k]$

(c) 序列 $h[-k]$ (d) 序列 $h[n-k]$

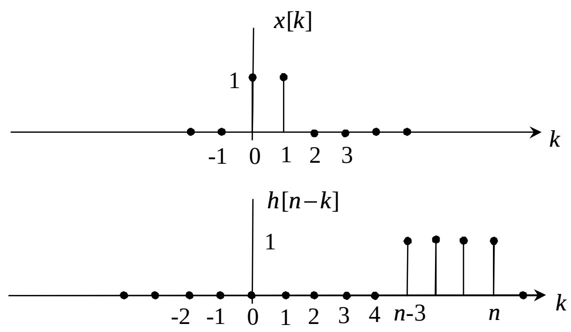
圖 Q8-2




(a) $n<0$ 的情況




(b) $0 \le n \le 4$ 的情況




(c) $n > 4$ 的情況

圖 Q8-3 $x[k]$ 與 $h[n-k]$ 乘積之圖解

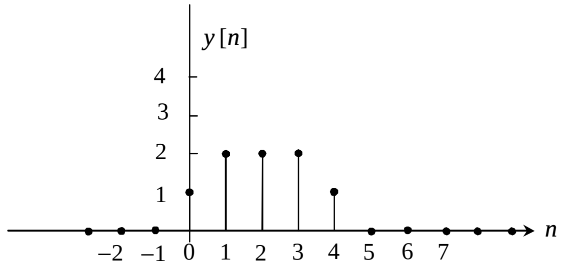



圖 Q8-4 練習題 8-2 之輸出信號 $y[n]$

8. 計算以下兩序列的旋積和。

$x[n]=a^n u[n]$，$0<a<1$；　$h[n]=b^n u[n], 0<b<1$

**解析**：依旋積運算定義計算

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u[k]b^{n-k}u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k b^{n-k}u[k]u[n-k]$$

因為

$$u[k]u[n-k]=\begin{cases}1, & 0\le k<n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

改寫 $y[n]$ 可得

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k b^{n-k}u[k]u[n-k]=\sum_{k=0}^{n}a^k b^{n-k}=b^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{b}\right)^k, \quad n\ge 0$$

利用附錄 A 之 (A.24)式，改寫 $y[n]$ 可得

$$y[n]=\begin{cases}b^n\dfrac{1-(a/b)^{n+1}}{1-a/b}u[n], & a\ne b\\ b^n(n+1)u[n], & a=b\end{cases}$$

9. 計算以下兩序列的旋積和。

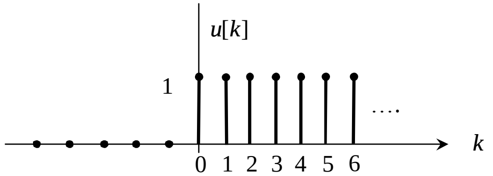
$x[n]=a^n u[n]$，$0<a<1$；　$h[n]=a^{-n}u[-n], 0<a<1$

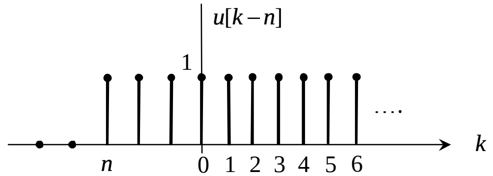
**解析**：依旋積運算定義計算

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u[k]a^{-(n-k)}u[-(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^{-n}a^{2k}u[k]u[k-n]$$

利用圖解判斷 $u[k]u[k-n]$




(i) 當 $n\le 0$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}a^{-n}a^{2k}=a^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}a^{2k}=a^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(a^2)^k=a^{-n}\frac{1}{1-a^2}, \quad n\le 0$$

(ii) 當 $n\ge 0$

$$y[n]=\sum_{k=n}^{\infty}a^{-n}a^{2k}=a^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}a^{2k}=a^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}(a^2)^k=a^{-n}\frac{a^{2n}}{1-a^2}=\frac{a^n}{1-a^2}, \quad n\ge 0$$

整理上述計算，兩序列的旋積和可表示成(如圖 P8-17 所示)

$$y[n]=\frac{a^{|n|}}{1-a^2}$$

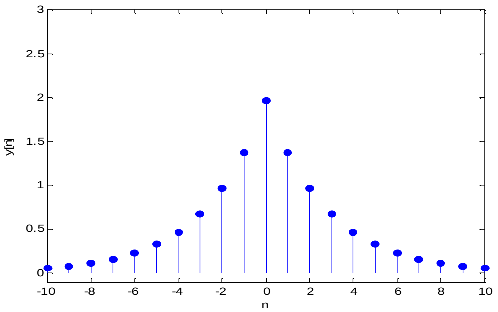



圖 P8-17 兩序列的旋積和 $y[n]$，

10. 一離散時間 LTI 系統的輸入信號與脈衝響應分別表示為

$$x[n]=\{\underset{\uparrow}{1},2,1,2,1\}\ ;\quad h[n]=\{\underset{\uparrow}{1},-1,1,0,1\}$$

請計算此系統的輸出信號 $y[n]$。

**解析：**在此利用直式乘法直接計算旋積和，其架構如下圖所示。

$$\begin{array}{lccccccccccl}
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \leftarrow x[k] \\
 & \times & & & & & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & \leftarrow h[k] \\
\hline
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 & & & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & & & & \\
x[0]h[0] \searrow & & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 &
\end{array}$$

○ 代表 0 點

由上述直式乘法結果可得輸出信號 $y[n]=\{\underset{\uparrow}{1},1,0,3,1,3,2,2,1\}$，如圖 P8-20 所示。

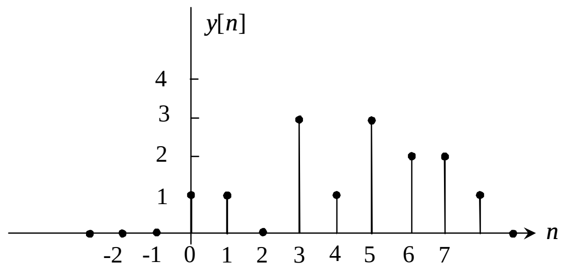



圖 P8-20 系統的輸出信號 $y[n]$

11. 給定一個 LTI 系統之輸入與脈衝響應分別為

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n];\quad x[n]=3d[n]-d[n-3]$$

請用 LTI 系統之線性與非時變特性找出系統之輸出信號。

**解析**：利用系統的非時變特性可知：當系統輸入為 $d[n-3]$ 時，對應輸出為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}u[n-3]$。

利用系統的線性特性可得 $x[n]=3d[n]-d[n-3]$ 所應輸出為

$$y[n]=3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}u[n-3]$$

12. 給定一離散時間 LTI 系統之可用以下差分方程式描述

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n],\ \text{初始條件}\ y[-1]=0 \qquad \text{(P8.25)}$$

當系統之輸入為下列序列時，請分別求出所對應的輸出。

(a) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

(b) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

**解析**：將(P8.25)式改寫成遞迴方程式

$$y[n]=ay[n-1]+x[n],\ \text{其中}\ a=\frac{1}{2} \qquad \text{(P8.25A)}$$

假設輸入為

$$x[n]=b^n u[n]$$

直接使用(P8.25A)式以及輸入信號可得到

$$\begin{aligned}
y[0]&=ay[-1]+x[0]=0+1=1\\
y[1]&=ay[0]+x[1]=a+b=a+b\\
y[2]&=ay[1]+x[2]=a(a+b)+b^2=a^2+ab+b^2\\
y[3]&=ay[2]+x[3]=a(a^2+ab+b^2)+b^3=a^3+a^2b+ab^2+b^3\\
&\vdots\\
y[n]&=ay[n-1]+x[n]=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k
\end{aligned}$$

計算輸出信號

$$\begin{aligned}
y[n]&=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k=a^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k=a^n\times\frac{1-(b/a)^{n+1}}{1-(b/a)}\\
&=a^n\times\frac{\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^{n+1}}}{\dfrac{a-b}{a}}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} \qquad ,a\neq b
\end{aligned}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k=a^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k=(n+1)a^n \quad ,a=b$$

(a) 當系統之輸入為 $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ 時，所對應的輸出為

$$y[n] = \frac{(1/2)^{n+1} - (1/3)^{n+1}}{1/2 - 1/3} = 6\left[(1/2)^{n+1} - (1/3)^{n+1}\right]u[n]$$

(b) 當系統之輸入爲 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$時，所對應的輸出爲

$$y[n] = (n+1)(1/2)^n u[n]$$