Solve the following ordinary differential equation [104 逢甲電子 1]

(a)$y''(t)-7y'(t)+6y(t)=2t$　　(b)$y''(t)+6y'(t)+8y(t)=\sin 3t$

[解](a)特徵方程式$\lambda^2-7\lambda+6=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda-6)=0\Rightarrow\lambda=1,\,6$

$y_h=c_1e^t+c_2e^{6t}$

令 $y_p=At+B\Rightarrow y_p'=A\Rightarrow y_p''=0$

代入原式

$$0-7\mathrm{A}+6(At+B)=2t\Rightarrow A=\frac{1}{3},\ B=\frac{7}{18}$$

得 $y(t)=y_h+y_p=c_1e^t+c_2e^{6t}+\dfrac{1}{3}t+\dfrac{7}{18}$

(b)特徵方程式$\lambda^2+6\lambda+8=0\Rightarrow(\lambda+2)(\lambda+4)=0\Rightarrow\lambda=-2,\,-4$

$y_h=c_1e^{-2t}+c_2e^{-4t}$

令 $y_p=A\sin 3t+B\cos 3t\Rightarrow y_p'=3A\cos 3t-3B\sin 3t\Rightarrow y_p''=-9A\sin 3t-9B\cos 3t$

代入原式

$$(-9A\sin 3t-9B\cos 3t)+6(3A\cos 3t-3B\sin 3t)+8(A\sin 3t+B\cos 3t)=\sin 3t$$

$$(-A-18B)\sin 3t+(18A-B)\cos 3t=\sin 3t$$

$$\begin{cases}-A-18B=1\\18A-B=0\end{cases}\Rightarrow A=-\frac{1}{325},\ B=-\frac{18}{325}$$

得 $y(t)=y_h+y_p=c_1e^{-2t}+c_2e^{-6t}-\dfrac{1}{325}\sin 3t-\dfrac{18}{325}\cos 3t$