

In the three-dimensional Cartesian coordinates, find the shortest distance of the intersection of $x+2y+3z=6$ and $3x+2y+z=6$ to the origin $(0, 0, 0)$. Also, what are the coordinates of the point that has this shortest distance? [98 交大機械丁 5]

[解]設兩平面交線的方向向量為 $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ，則 \mathbf{v} 同時垂直兩平面的法向量

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0 \\ \mathbf{v} \cdot (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a : b : c = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 : (-2) : 1$$

任意找一點同時在兩平面上： $(1, 1, 1)$ ，因此直線的參數式為 $x = t + 1, y = -2t + 1, z = t + 1$
直線上任一點與原點的距離為

$$\sqrt{(t+1)^2 + (-2t+1)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{6t^2 + 3}$$

當 $t = 0$ 時，距離最短為 $\sqrt{3}$ ，對應的點為 $(1, 1, 1)$