

Please find the solution of $y'' - 2y' + y = 2\sin 3x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. [106 中興電機乙丙丁光電 8(2)]

[解] 特徵方程式 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 1$

$$y_h = (C_1 + C_2x)e^x$$

$$\text{Let } y_p = A\sin 3x + B\cos 3x \Rightarrow y_p' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x \Rightarrow y_p'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x$$

代入原式

$$(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x) - 2(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) + (A\sin 3x + B\cos 3x) = 2\sin 3x$$

$$(-8A + 6B)\sin 3x + (-6A - 8B)\cos 3x = 2\sin 3x$$

$$\begin{cases} -8A + 6B = 2 \\ -6A - 8B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{4}{25}, B = \frac{3}{25}$$

$$\text{得 } y(x) = y_h + y_p = (C_1 + C_2x)e^x - \frac{4}{25}\sin 3x + \frac{3}{25}\cos 3x$$